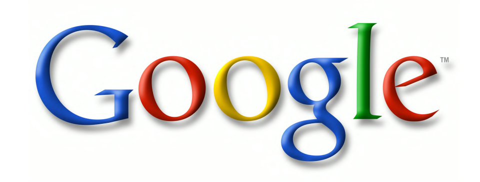




COMMUNICATIONS DIVERSES.

CONFÉRENCES.

AUTEURS.

SECONDE PARTIE

—

MÉMOIRES

AUTEURS.

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *On demande des recherches nouvelles sur des combinaisons renfermant le noyau* C_n — C_3H_5.

2° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

3° *Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.*

4° *Étudier la fixation de l'azote par le sol et par la plante, au point de vue biologique et agricole.*

Le 1er octobre 1891 est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE 1[er]. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). »

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier.

Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique, ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et les séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

Note. — Le tirage au sort, ordonné par l'article 3, a rangé les sections dans l'ordre suivant : 2e, 4e, 3e, 5e et 1re.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent ***nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;*** quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^a de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15. Ianuarii 1879. Pontificatus Nostri Anno Primo.

Leo P. P. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

Chers fils, salut et bénédiction apostolique.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant

à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne: et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

Liste des membres fondateurs.

S. E. le cardinal DECHAMPS (1), archevêque de. .	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (1).	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE (1)	Anvers.
Le chanoine MAES (1)	Bruges.
Le chanoine DE LEYN	Bruges
LEIRENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS (1)	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Cher DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL.	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le duc D'URSEL, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave DE CROY (1)	Le Rœulx.
Le Cte DE T'SERCLAES (1)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (1)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE CONCEPTION	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS.	Liège.
Le Cte DE BERGEYCK	Beveren-Waes.

(1) Décédé.

L'Institut SAINT-IGNACE . . . . Anvers.
Philippe GILBERT . . . . Louvain.
Le R. P. PROVINCIAL de la Compagnie de Jésus en Belgique . . . . Bruxelles.
Le Collège d'ALOST . . . . Alost.
Le chanoine DE WOUTERS . . . . Braine-le-Comte.
Antoine D'ABBADIE, membre de l'Institut . . . Paris.
S. E. le cardinal HAYNALD, archevêque de Kalocsa et Bàcs . . . . Kalocsa (Hongrie).
S. E. le cardinal Séraphin VANNUTELLI . . . . Rome.
S. G. Mgr DU ROUSSAUX, évêque de . . . . . Tournay.
S. E. le cardinal GOOSSENS, archevêque de . . . Malines.
R. BEDEL . . . . Aix.
S. G. Mgr BELIN, évêque de. . . . . Namur.
Eugène PECHER. . . . . Bruxelles.
S. G. Mgr FERRATA, archevêque de Thessalonique Rome.
S. Exc. Mgr NAVA DI BONTIFÈ, nonce apostolique Bruxelles.

Liste des membres honoraires.

Le P^ce B. BONCOMPAGNI, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei . . . . Rome.
Antoine D'ABBADIE, membre de l'Institut . . . Paris.
Charles HERMITE, membre de l'Institut . . . . Paris.
Le général NEWTON . . . . New-York.
Le docteur FOERSTER . . . . Aix-la-Chapelle.
A. DE LAPPARENT . . . . Paris.
A. BÉCHAMP . . . . Lille.
Camille JORDAN, membre de l'Institut . . . . Paris.
WOLF, membre de l'Institut . . . . Paris.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut . Paris.
Le vice-amiral DE JONQUIÈRES, membre de l'Institut. Paris.
BOUSSINESQ, membre de l'Institut . . . . . . Paris.
L. DE BUSSY, membre de l'Institut. . . . . . Paris.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

D'ABBADIE (Antoine), membre de l'Institut, 120, rue du Bac. — Paris; ou Abbadia par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).
ABBELOOS (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique de l'Université. — Louvain.
D'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.
ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya.— Espagne).
ALCOLADO, S. J. (R. P. Miguel), professeur d'analyse, Colegio de Estudios superiores. — Deusto (Bilbao — Espagne).
ALEXIS, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.
ALFAGEME (José), catedrático de Fisica y Quimica en el Instituto. — Santiago (Espagne).
ALLARD (François), industriel. — Châtelineau.
ALMAIN-DE HASE, ingénieur-architecte, 157, rue de la Loi. — Bruxelles.
ANDRÉ (J.-B.), inspecteur au ministère des travaux publics, 93, avenue Brugmann. — Uccle.
ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).
ARDUIN (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
BAGUET (Charles), avocat, receveur de l'Université, 6, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
BAILLON, 10-11, place de la Calandre. — Gand.
BALAGUER (Vicente), rector del Seminario Conciliar. — Huesca (Aragon. — Espagne).
BARCIA CABALLERO (Juan), catedratico de diseccion en la Universidad, Puerta de la Peña, 10. — Santiago (Espagne).
BARDIN (abbé Louis), professeur de géologie à la Faculté, 21, rue Brault. — Angers (Maine-et-Loire — France).
DI BARTOLO (Canonico Salvatore), via della Libertà, 1. — Palermo (Sicile).
BAULE (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas. — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).
BAYET (Adrien), 30, nouveau marché aux Grains. — Bruxelles
BAYET (Ernest), 58, rue Joseph II. — Bruxelles.

Beaucourt (abbé Léopold), curé des Écaussinnes d'Enghien.
de Beauffort (Cte Henri), 125, rue de Grenelle. — Paris; ou château de Bossuyt, par Avelghem (Flandre-Occidentale).
Béchamp, doyen de la Faculté catholique de médecine, 56, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).
Bedel (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire d'Aix (Bouches-du-Rhône — France).
Belin (S. G. Mgr), évêque de Namur.
Bellemans (Charles), comptable, 46, courte rue d'Argile. — Anvers.
Belpaire (Théodore), directeur du service provincial, 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.
de Bergeyck (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre-Orientale).
Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, faubourg Saint-Laurent. — Liège.
Berlingin (Melchior), directeur de l'usine de la Vieille-Montagne. — Penchot (Aveyron — France).
Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
Béthune-Eliaert (Bon), sénateur, rue du Pont. — Alost.
Béthune (Mgr Félix), rue d'Argent. — Bruges.
Bichot (Abbé), professeur au Petit-Séminaire, 19, rue N.-D. des Champs. — Paris.
Blondel (Alfred), ingénieur, 14, rue de la Magdeleine. — Tournay.
Blondiaux (Auguste), à Morialmé (Namur).
Blot (abbé), 25, avenue de Messine. — Paris.
de la Boëssière-Thiennes (Mis), 25, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).
Bonamis (Florimond), ingénieur. — Jambes (Namur).
Boncompagni (Pce B.), de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, palazzo Piombino, piazza Colonna. — Rome.
Borginon (Gustave), docteur en médecine, 58, rue Dupont. — Bruxelles.
de Borman (Chev Ernest), 56, rue de la Commune. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).
Bossu (abbé L.), professeur à l'Université, rue de Bériot. — Louvain.
Boulay (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 127, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Bouquillon (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington (Brookland, D. C. — États-Unis d'Amérique).
Bourdeau (Abel), médecin de bataillon de 1re classe, École des Pupilles de l'armée. — Alost.

BOURGEAT (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

BOUSSINESQ, membre de l'Institut, 1, rue Claude-Bernard. — Paris.

DU BOYS (Paul), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Annecy (Hte-Savoie — France).

BRANLY (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 42, avenue de Breteuil. — Paris.

BRASSINE (J.-J.), général commandant la 2e division d'infanterie. — Anvers.

BREITHOF (N.), professeur à l'Université, rue de Bruxelles. — Louvain.

BRIBOSIA, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine, 16, rue Neuve. — Namur.

BROCKMAN (Guillermo), hijo. — Pachuca (Estado de Hidalgo — Mexique).

BRUYLANTS, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, rue de Malines. — Louvain.

BUISSERET (Anatole), préfet des études au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.

BUISSERET (Joseph), professeur au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.

DE BUSSY (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.

CAMBIER (Vital), industriel. — Morlanwelz (Hainaut).

CANFYN (Albert), 3, place du Lion d'Or. — Gand; ou Evergem près Gand.

CAPPELLEN (Guillaume), avocat, 4, place Marguerite. — Louvain.

CARNOY (Joseph), professeur à l'Université, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

CARTUYVELS (Mgr), vice-recteur de l'Université. — Louvain.

CARTUYVELS (Jules), directeur au ministère de l'agriculture, 40, rue Breydel. — Bruxelles.

CASARÈS (Demetrio), farmaceutico. — Santiago (Galice — Espagne).

CASARÈS (Firmino), en la Coruña (Espagne).

CHARLIER (Ernest), docteur en médecine, 4, rue de la Cuiller. — Bruxelles.

DU CHASTEL (Cte Henri), 55, rue de Trèves. — Bruxelles.

CHAUTARD, doyen de la Faculté catholique des sciences, 3, rue Saint-Martin. — Lille (Nord — France).

CLAES (Paul), 79, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

CLASEN (abbé B.-I.), curé doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).

COGELS (J.-B.-Henri), 38, longue rue de l'Hôpital. — Anvers.

COLLANTES (Pedro), licenciado, calle del Esclavo, n° 10. — Mexico (Mexique).

COLLANTES (Dr. Juan de Dios), calle de las Moras, n° 18. — Mexico (Mexique).

COLLÈGE D'ALOST, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX. — Namur.

COLLÈGE SAINT-MICHEL. — Bruxelles.

COLLÈGE SAINT-SERVAIS. — Liège.

COOLS (Auguste), ingénieur. — Lierre.

COPPIETERS DE STOCKHOVE (abbé Ch.), vicaire à Sainte-Walburge. — Bruges.

DE CORSWAREM (Cher Adrien), avocat. — Hasselt.

COUSIN (L.), professeur à l'Université, conseiller technique du gouvernement chilien, 95, calle Santo Domingo. — Santiago (Chili).

CRANINCX (Oscar), 41, rue de la Loi. — Bruxelles.

CRANINCX (P.-J.-E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.

DE CROY (Pce Juste), 53, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.

CUYLITS (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

DAVIGNON (Julien), 35, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.

DE BAETS (Herman), 16, rue du Bélier. — Gand.

DEBAISIEUX, professeur à l'Université. — Louvain.

DE BECKER (abbé Jules), professeur à l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

DE BLOO (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.

DE BROUWER (abbé), supérieur du Petit-Séminaire. — Roulers.

DE BRUYN (Jules), 171, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

DE DECKER (Eugène), membre de la Chambre des Représentants, 34, rue de Vénus. — Anvers.

DE GREEF, S. J. (R. P. Henri), 11, rue des Récollets. — Louvain.

DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

DE JAER (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — Mons.

DE LANTSHEERE (Léon), avocat, 210, rue du Trône. — Bruxelles.

Delattre, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Delebecque-Vergauwen, 12, rue aux Draps. — Gand.
De Leyn (chan. A.), 52, rue du Marécage. — Bruges.
De Lorge (abbé J.), professeur au Séminaire. — Roulers.
Delsaulx, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège N.-D. de la Paix. — Namur.
Delvigne (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
Demanet (abbé), professeur au Collège de Bellevue. — Dinant.
De Meester (Augustin), propriétaire. — Saint-Nicolas.
Deploige (Simon), docteur en droit. — Tongres.
De Preter (Herman), ingénieur, 28, boulevard du Jardin Botanique. — Bruxelles.
De Prins, place du Peuple. — Louvain.
Descamps (abbé A. J.), inspecteur des Écoles du canton de Mons, curé d'Harmignies (Hainaut).
Desplats (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 52, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
Detierre (abbé), aumônier de l'École militaire, 170, rue de la Loi. — Bruxelles.
De Tilly (colonel J.), de l'Académie royale de Belgique, commandant de l'École militaire. — Bruxelles.
Dewalque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Dewalque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liège.
. Dierckx (P.), membre de la Chambre des Représentants. — Turnhout.
Dincq-Jordan, ingénieur et industriel, Pont-Canal, Jemappes (par Mons-Station).
Dohet (Ferdinand), avocat, membre de la Chambre des Représentants, place St-Aubin. — Namur.
Dollo (Louis), aide-naturaliste au Musée d'histoire naturelle de Belgique, 69, rue du Cornet. — Etterbeek (Bruxelles).
de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux, par Floreffe (Namur).
de Dorlodot (H.), docteur en théologie, professeur au Grand-Séminaire. — Namur.
Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 57, Coupure. — Gand.

Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Dumont (André), professeur à l'Université, 13, rue de la Laie. — Louvain.

Durant (Henri), inspecteur-général des charbonnages patronnés par la Société générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Du Rousseaux (S. G. Mgr), évêque de Tournay.

Dusausoy (Clément), professeur à l'Athénée royal, 117, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dutordoir (Hector), sous-ingénieur provincial, 311, boulevard du Château. — Gand.

École libre Sainte-Geneviève, rue Lhomond. — Paris.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard, Paris.

de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — Hamont, par Neerpelt (Limbourg).

Eynaud, ingénieur de la marine, directeur des constructions navales. — Lorient (Morbihan — France).

Faucon (A.), docteur en médecine. — Le Rœulx.

Fauvel (Albert A.), 15, avenue de Breteuil. — Paris.

Fauvel (Emmanuel), contrôleur des contributions directes, 6, rue du Château. — Saint-Lô (Manche — France).

Feijeiro (Maximino), catedrático de Patologia y Clinica en la Universidad. — Santiago (Espagne).

Félicien (Monsieur), supérieur-général des Joséphites. — Grammont.

Feliù y Perez (Bartolomé), profesor en la Universidad, calle del Bruch, 31. — Barcelona (Espagne).

Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

Ferrand de Missol (Amédée), 40, boulevard Montparnasse. — Paris.

Ferrata (S. G. Mgr), archevêque de Thessalonique, ancien nonce du S. Siége en Belgique, palazzo Ballestra, place des SS. Apôtres. — Rome.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), calle del Lobo, 34, pral. — Madrid (Espagne).

Floren (Gustave), 15, Sydney street. — Londres.

Foerster (Dr), professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.

Fontaine (Théodore), professeur à l'Université, 14, rue des Orphelins. — Louvain.

Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).

de Foville (abbé), professeur à l'Université. — Montréal (Canada).

François, S. J. (R. P. Alexis), professeur au Collège de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liège.

Gallez (Louis), docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine. — Châtelet.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — Paris.

Gautier (chanoine), 79, rue Notre-Dame. — Malines.

Gelin (abbé), professeur au collège Saint-Quirin. — Huy.

George, S. J. (R. P. Charles), 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

de Gerlache (Paul), gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.

Gerste, S. J. (R. P.), sacristia de las Capuchinas, 5. — Puebla (Mexique).

Gilbert (Jules), industriel. — Givet (Ardennes — France).

Gilbert (Ph.), professeur à l'Université, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, membre correspondant de l'Institut, 20, rue Notre-Dame. — Louvain.

Goedseels (Édouard), lieutenant, répétiteur à l'École militaire, 48, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles.

Goix (Alph.), docteur en médecine, 40, rue de Joinville. — Paris.

Goossens (S. E. le cardinal), archevêque de Malines.

Goris (Charles), docteur en médecine, 143, rue Royale. — Bruxelles.

de Granada (S. Exc. Mgr le Duc), cuesta de Santo Domingo, n° 5. — Madrid (Espagne).

Grandmont (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile).

Granero, S. J. (R. P. Juan), colegio de N. Sra del Recuerdo, Chamartin de la Rosa. — Madrid (Espagne).

Gredilla (Apolinar Federico), docteur en sciences naturelles, aide-naturaliste au Musée de Madrid, rue de Leganitos, n° 23, 3°. — Madrid (Espagne).

Greindl (Bon Gustave), 20, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Grenier (Gustave), propriétaire, 78, rue de la Station. — Louvain.

Grinda (Jesus), ingénieur des ponts et chaussées, Valverde, 22, 2°. — Madrid (Espagne).

Grisar (Armand), 5, rue Hoboken. — Anvers.

de Grossouvre (A.), ingénieur des mines. — Bourges (Cher — France).
de Grunne (Cte François), capitaine d'artillerie, 65, rue Belliard. — Bruxelles.
Guyétand, professeur de physique, École libre de Mont-Roland. — Dôle (Jura — France).
Haan, docteur en médecine, professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont. — Louvain.
Hahn, S. J. (R. P. Guillaume), professeur à l'Université, University College, St. Stephen's Green. — Dublin (Irlande).
Hamard (chan.), 12, rue des Dames. — Rennes (Ille-et-Vilaine — France).
Hanquet (Ferdinand), 16, rue du Laveu. — Liège.
de Harlez (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.
Haton de la Goupillière (J. N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.
de Haulleville (Bon), 97, rue Belliard. — Bruxelles.
de la Haye (Auguste), capitaine en 1er au 11e régiment de ligne. — Liège.
Haynald (S. E. le cardinal), archevêque de Kalocsa et Bàcs (Hongrie).
de Hemptinne (Cte Joseph), fils, 31, rue Charles-Quint. — Gand; ou Tamise (Flandre Orientale).
Henry (Hector). — Dinant.
Henry (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.
Hermite (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.
Hervier (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).
Heymans (J.-F.), docteur en sciences, assistant à l'Institut physiologique, Dorotheenstrasse. — Berlin (Allemagne).
Houtart (Jules). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
Houze (Octave), docteur en médecine. — Binche.
Icazbalceta (Joaquín Garcia), Apartado del Correo, 366. — Mexico (Mexique).
Imperiali (Mis), des Pces de Francavilla, 10, rue Montoyer. — Bruxelles; ou château d'Hamal par Tongres.
Iñiguez é Iñiguez (Francisco), catedratico de Astronomia en la Universidad, calle de Jardines, 18. — Madrid (Espagne).
Institut Saint-Ignace. — Anvers.

JACMART, lieutenant-général, membre de la Chambre des Représentants, 21, rue Geefs. — Schaerbeek.

JACOBS (Mgr), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

JANNET (Claudio), professeur aux Facultés catholiques, 11, rue las Cases. — Paris.

JANSSENS, docteur en médecine. — Puers (Anvers).

JENNER (Ch. I.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, directeur des travaux hydrauliques de la marine, 38, rue de la Rampe. — Brest (Finistère — France).

JIMENO (Joaquin), ingeniero de caminos. — Castellon de la Plana (Espagne).

JOLLY (B^{on}), lieutenant-général, commandant la 1re circonscription militaire. — Anvers.

JOLY (Léon), avocat, 18, rue Caroly. — Bruxelles.

DE JONQUIÈRES, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.

JORDAN (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.

JOURDAIN (Louis), ingénieur, 19, rue Léopold. — Bruxelles.

KENNIS (Guillaume), ingénieur, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek.

KIRSCH (R. P. Alexandre M.) C. S. C. — Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des forêts, 7, rue de l'Orangerie. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

KURTH (Godefroid), professeur à l'Université, 62, rue Lairesse.—Liège.

LACOMPTE (Camille), docteur en médecine. — Tamise.

LACOR (E.), professeur de mathématiques à l'École Sainte-Geneviève, 133, boulevard Raspail. — Paris.

LAGASSE (Alexandre), pharmacien, 4, rue Saint-Maurice. — Nivelles.

LAGASSE (Charles), ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, 61, rue du Conseil. — Bruxelles.

LAGASSE (Jules), notaire, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

LAHOUSSE (D^{r}), professeur à l'Université, 2, rue des Dominicains. — Gand.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liège.

LAMBERT (Camille), ingénieur, 7, rue d'Archis. — Liège.

LAMBIOTTE (Victor), ingénieur. — Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).

LAMEY (R. P. Dom Mayeul), O. S. B., prieuré de Saint-Jean, Grignon par Les Laumes (Côte-d'Or — France).

LAMY (Mgr), président du collège Marie-Thérèse. — Louvain.

DE LAPPARENT (A.), membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

LAVAUD DE LESTRADE, prêtre de Saint-Sulpice, professeur de sciences au Séminaire. — Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).

LEBON, docteur en médecine, place Saint-Paul. — Nivelles.

LEDRESSEUR (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 75, voer des Capucins. — Louvain.

LEEMANS, docteur en médecine, 19, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

LEFEBVRE, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (abbé Ferdinand), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (abbé Maurice), 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEGRAND-BENOIT, 31, rue de Bruxelles. — Namur.

LE GRELLE (Cte Ferdinand), 21, rue Van Brée. — Anvers.

LEIRENS-ÉLIAERT, rue du Pont. — Alost.

LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan par Pepinster (Liège).

LEMOINE (Georges), ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie pour la chimie à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.

LEMONNIER (abbé Th.), professeur au Petit-Séminaire de Mont-aux-Malades, par Rouen (Seine-Inférieure — France).

LE PAIGE (C.), professeur à l'Université, 21, rue des Anges. — Liège.

DE LICHTERVELDE (Cte Gontran), conseiller de légation, 2, rue des Deux-Églises. — Bruxelles.

DE LIEDEKERKE (Cte Charles), 24, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

DE LIEDEKERKE DE PAILHE (Cte Édouard), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Samuel), 30, rue du Luxembourg.— Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Thierry), sénateur, rue Hautport. — Gand.

DE LIMMINGHE (Cte), château de Gesves, par Assesse (Namur).

LIMPENS (Émile), avocat, place Impériale. — Alost.

DE LISLEFERME (E.-Henry), ingénieur de la marine en retraite. — Taillebourg (Charente-Inférieure — France).

LUCAS, S. J. (R. P. Désiré), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Mabille (Léon), professeur à l'Université, 24, rue Marengo. — Louvain.

Maertens (chanoine), professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Nicolas.

Malcorps (Ernest), avocat, 5, rue des Vaches. — Louvain.

Malisoux (Émile), ingénieur principal de 1re classe des mines, 11, rempart ad aquam. — Namur.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

de Maret (Adhémar). — Stavelot.

de Maricourt (Cte), à Villemétrie. — Senlis (Oise — France).

de Marsilly (Général), Grand-Hôtel de Paris, rue Bab-el-Oued. — Alger.

Martens (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Martinez y Saez (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, plaza de Ministerios, 5, 3°, izq. — Madrid (Espagne).

Mas, S. J. (R. P. Bartolomé), colegio de S. Ignacio. — Manresa.

Masoin (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, Marché-aux-Poissons. — Louvain.

Matagne (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

de Maupeou (Cte), ingénieur de la marine, 30, rue Vital. — Passy-Paris.

Mayer (Henri), avocat, 31, rue Saint-Jacques. — Tournay.

Messen (Wilhelm), 28, place Jourdan. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, 72, rue du Vertbois. — Liége.

Meeus-Honnorez (L.), distillateur. — Wyneghem par Anvers.

Mello (Rev. J. Magens), Mapperly Vicarage, Derby (Grande-Bretagne).

de Mendizabal Tamborrel (Joaquin), ingeniero geógrafo, profesor de astronomía y geodesía en el Colegio militar, observatorio meteorologico central. — Mexico (Mexique).

Mercier (Mgr D.), 84, rue de Namur. — Louvain.

Mertens (Guill.), ingénieur, directeur de l'usine à gaz, 73, rue de Tourcoing. — Roubaix (Nord — France).

Merveilleux du Vignaux (Pierre), ingénieur des forges et chantiers de la Méditerranée, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

Micha, professeur à l'Université, 8, place du Peuple. — Louvain.

MIOT (Léopold), docteur en médecine, de l'Académie royale de médecine, 15, rue de Beaumont. — Charleroi.
MIR, S. J. (R. P. Michel), membre de l'Académie royale d'Espagne, Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).
MIRANDA BISTUER (Julian), canónigo magistral de la catedral, canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).
MISONNE (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).
MISSON (Bon), 16, quai de Maestricht. — Liége.
MOELLER, docteur en médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.
MONCHAMP (abbé Georges), docteur en théologie et en philosophie, professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Trond.
MONSARRAT (G.), 14, rue des Capucines. — Paris.
DE MONTGRAND (Mis), propriétaire à Saint-Menet. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).
DE MOREAU D'ANDOY (Cher), 186, avenue Louise. — Bruxelles.
MORETUS (René), place de Meir. — Anvers.
MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 21, rue Duvivier. — Liége.
DE NADAILLAC (Mis), 18, rue Duphot. — Paris.
NAMÈCHE (Mgr), ancien recteur magnifique de l'Université.— Louvain.
NAVA DI BONTIFÈ (S. Exc. Mgr), archevêque d'Héraclée, nonce du S. Siége en Belgique. — Bruxelles.
NÈVE (Félix), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 52, rue des Orphelins. — Louvain.
NEWTON (Général John), 279, Adelphi Street. — Brooklyn, New-York.
NISOT (Victor), ingénieur, docteur en sciences physiques et mathématiques, 44, rue de la Loi. — Bruxelles.
NOLLÉE DE NODUWEZ, 116, rue Royale. — Bruxelles.
NYSSENS (Albert), professeur à l'Université. — Louvain.
NYSSENS (Julien), ingénieur des ponts et chaussées, 190, rue de la Loi. — Bruxelles.
NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 19, rue Sainte-Marguerite. — Gand.
D'OCAGNE (Maurice), ingénieur des ponts et chaussées. — Pontoise (Seine-et-Oise — France).
OTTO (Jean), 36, Marché-aux-Herbes. — Bruxelles.
OUVERLEAUX-LAGASSE (Félix), docteur en droit, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
PARDON (Gustave), ingénieur. — Frameries (Hainaut).

PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.

PECHER (Eugène), 64, avenue Louise. — Bruxelles.

PEPIN, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).

PERETTI (abbé J.), curé de Sainte-Marie. — Calvi (Corse — France).

PEREZ (Miguel), director del Observatorio central, 1a calle de la Merced, n° 27. — Mexico (Mexique).

PEREZ MORENO (Andrés), inspector general del cuerpo de ingenieros de minas de España, calle de Apodaca, n° 3, cto pral izq. — Madrid (Espagne).

PETIT (chanoine), rue de l'Arsenal. — Namur.

PICHAULT (Stéphane), ingénieur, directeur des ateliers de construction de la Société Franco-Belge. — Raisnes (Nord — France).

DE PILLON DE S. PHILBERT (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).

PIRARD (chanoine), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.

PISCÉ (chanoine), rue des Bateaux. — Malines.

POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

DE PONTHIÈRE (Albert), propriétaire-agriculteur, château des Cortils, par Visé (Liège).

POWIS DE TEN BOSSCHE, membre de la Chambre des Représentants, 8, rue Belliard. — Bruxelles.

PROOST (Alphonse), inspecteur général de l'agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

PROVINCIAL (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 131, rue Royale extérieure. — Bruxelles.

PRUDHAM (abbé), directeur du collège Stanislas, rue N.-D. des Champs. — Paris.

PUGA (Guillermo B. y), ingeniero topógrafo, profesor de Geologia en la Escuela nacional de Agricultura, calle del Tompeate, 2. — Mexico (Mexique).

QUAIRIER, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

QUEIPO (Antonio Garcia Vazquez), docteur en droit, plaza de Cervantes, n° 13. — Santiago (Galice — Espagne).

RACHON (abbé Prosper), curé de Ham et Saint-Jean, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

RACLOT (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

RAMIREZ (Santiago), ingeniero de minas, calle de Buenavista, 15 ½ — Mexico (Mexique).

RAVAIN (abbé J.-R.), 14, rue Bernier. — Angers (Maine-et-Loire — France).

RECTEUR (R. P.), rue de Tongres, 2237. — Maestricht (Limbourg hollandais).

RECTOR (R. P.) del Colegio de San José. — Valladolid (Espagne).

RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (prov. de Tarragona — Espagne).

DE REGNON, S. J. (R. P. Théodore), 391, rue de Vaugirard. — Paris.

RENARD (abbé Alphonse), conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre-Orientale).

REYNAERT, docteur en médecine, rue du Progrès. — Saint-Nicolas.

DE RIBAUCOURT (Cte), sénateur, 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde.

RISUEÑO (Emiliano Rodriguez), catedratico de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16 pral. — Valladolid (Espagne).

DE LA ROCHE (Chev. Camille), rue de Houdain. — Mons.

DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile), 8, rue du Parchemin. — Bruxelles.

ROMILLON (abbé Pr.), professeur de philosophie au Petit-Séminaire de la Primatiale, 1, rue Tramassac. — Lyon (Rhône — France).

ROJAS, S. J. (R. P.), professeur d'histoire naturelle, Colegio. — Orduña (Vizcaya — Espagne).

DE ROUILLÉ (Cte), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.

ROUSSEL (Lucien), professeur à l'École forestière, 14, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

DE RUBEMPRÉ (Pce), rue aux Laines. — Bruxelles; ou à Westerloo.

SAEY (Henri), notaire. — Renaix.

SAEY (abbé Fr.), curé à Woubrechtegem, par Herzele (Fland.-Orient.).

de Salvert (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

Sanchez, S.J. (R. P. Hilario), Colegio. — Carrion (Palencia — Espagne).

de Santa Cruz (Ivan Armada Hernandez de Cordova, M^es^), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).

Sanz (Pelegrin), ingeniero civil. — Castellon de la Plana (Espagne).

Sanz y Lopez (Cesareo), profesor de matemáticas, calle del Colegio de Doncellas. — Toledo (Espagne).

Scarsez de Locqueneuille (Anatole), château de St-François. — Farciennes (Hainaut); ou 153, chaussée de Vleurgat. — Ixelles.

Schmitz, S. J. (R. P. Gaspar), au Collège Saint-Servais, 80, rue Saint-Gilles. — Liège.

Schobbens, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.

Schoemaker (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).

de Schoutheete de Tervarent (Ch^er^). — Saint-Nicolas.

Simonis (Alfred), sénateur. — Verviers.

Simonis (Louis), industriel. — Verviers.

Siret (Henri), ingénieur, 11, rue Saint-Joseph. — Anvers.

Siret (Louis), ingénieur, Parazuelos Aguilas (prov^e^ Murcia — Espagne).

Smekens (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Hasselt.

del Socorro (José Maria Solano, M^es^), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).

Solvyns (Albert), 7, avenue de la Place-d'Armes. — Gand.

Soreil, ingénieur. — Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

Spina, S. J. (R. P. Pedro), Colegio de S. Juan Nepomuceno. — Saltillo (Coahuila — Mexique).

Springael (Auguste), ingénieur, 64, rue de Bordeaux. — Bruxelles.

Stainier (Xavier), 78, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Stillemans (S. G. Mgr), évêque de Gand.

STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

STOESSER (Alphonse), directeur-gérant de la Société anonyme du charbonnage de Sacré-Madame. — Dampremy (Hainaut).

STOFFAES (abbé), licencié ès sciences, 54, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).

STORMS (John), 37, rue des Champs-Élysées. — Bruxelles.

STORMS (Raymond), 13, rue du Président. — Bruxelles.

STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue de l'Hôtel-des-Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

SUCHETET (André), 10, rue Alain Blanchard. — Rouen (Seine-Inférieure — France).

SUTTOR (Eugène), ingénieur honoraire des ponts et chaussées, 19, rue des Bogards. — Louvain.

SWOLFS (chanoine), professeur au Petit-Séminaire. — Malines.

TAYMANS (Émile), notaire. — Genappe (Brabant).

TEIXEIRA (Gomes), professeur à l'École polytechnique. — Porto (Portugal).

TERCELIN (Félix), rue du Mont-de-Piété. — Mons.

THEUNIS (Auguste), répétiteur à l'Université, 83, rue de Tirlemont. — Louvain.

THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).

THIRION (Alphonse). — Sclayn par Namèche (Namur).

THIRION, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 24, rue de Fragnée. — Liège.

TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, 61, pral. — Madrid (Espagne).

TRAS, S. J. (R. P.), professeur au collège de la Paix. — Namur.

DE TRAZEGNIES (Mis). — Corroy-le-Château, par Gembloux.

DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

DE T'SERCLAES (Cte Jacques), capitaine au 1er rég. d'artillerie, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

T'SERSTEVENS (Léon), 52, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.

TYKORT (Émile), ingénieur civil. — Perck, par Vilvorde.
D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant).
DU VAL DE BEAULIEU (Cte), 55, avenue des Arts. — Bruxelles.
DE LA VALLÉE POUSSIN (Charles), de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.
VAN AERTSELAER (chanoine), directeur de l'Institut St-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.
VAN BIERVLIET (Alb.), professeur à l'Université catholique, 25, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
VANDEN BERG (Charles), notaire, place Saint-Paul. — Liège.
VANDEN BOSSCHE (A.), ingénieur, rue des Orphelins. — Louvain.
VANDEN BRANDEN DE REETH (Mgr), Évêque d'Érythrée, au Collège Belge. — Rome.
VANDEN GHEYN (abbé Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.
VANDEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), professeur à l'Institut catholique, 35, rue de Sèvres. — Paris.
VANDEN PEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liège.
VANDEN PEEREBOOM (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Courtrai.
VANDER BRUGGEN (Bon Maurice), rue du Gouvernement. — Gand.
VANDER HAEGHEN (William), avocat, 44, rue Berckmans. — Bruxelles.
VANDER SMISSEN (Édouard), avocat, 16, rue du Gouvernement-Provisoire. — Bruxelles.
VANDER STRATEN-PONTHOZ (Cte François), 13, rue de la Loi. — Bruxelles.
VANDER VOORDT (Jules), ingénieur, 83, marché aux Chevaux. — Anvers.
VAN DE WOESTYNE (chan.), professeur au Grand-Séminaire. — Bruges.
VAN DORPE (Jules), docteur en médecine, 7, rue Seutin. — Bruxelles.
VAN DRÈCHE, docteur en médecine, rue de l'Ouvrage. — Namur.
VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.
VAN ERMENGEM, docteur en médecine, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre orientale).
VAN GAMEREN (chanoine), rue du Bruul. — Malines.
VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 161, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.
VANNUTELLI (S. E. le cardinal Serafino). — Rome.

Van Ortroy (Fernand), lieutenant au 1er régiment de chasseurs à cheval, 14, rue Saint-Jean. — Tournay.
Van Overloop (Eugène), sénateur, 48, rue Royale. — Bruxelles.
Van Segvelt (Edmond), 112, boulevard des Arbalétriers. — Malines.
Van Tricht, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Van Zeebroeck (abbé), directeur à l'Établissement des Sœurs-Grises. — Diest.
Van Zuylen-Orban (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liège.
Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).
Venneman, docteur en médecine, professeur à l'Université. — Louvain.
Vercruysse (Victor), 61, rue de France. — Courtrai.
Verhelst (abbé), professeur au collège Saint-Jean-Berckmans. — Anvers.
Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 25, rue des Écreniers. — Louvain.
Vicaire (Eugène), ingénieur en chef des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.
Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).
Vilain XIIII (Vte), sénateur, 11, rue du Trône. — Bruxelles.
Villafuerte (Eliodoro), presbitero, 86, calle de las Delicias. — Santiago (Chili).
de Villers-Vergauwen, 12, marché au Lin. — Gand.
Villié, professeur aux Facultés catholiques, 78, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Viñes (R. P. Benito), director del Observatorio, colegio de Belen. — La Havane (Cuba).
Visart de Bocarmé (Cte Amédée), bourgmestre de Bruges.
de Vorges (E. Domet), 74, rue Miromesnil. — Paris.
Vuilsteke, professeur à l'Université, 24, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Walravens (abbé Adelson), directeur du collège d'Enghien.
Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 3e lanciers, 1, rue Longue. — Bruges.
Wasseige (Armand), banquier, 2bis, rue Godefroid. — Namur.
Wautelet (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

de Wavrin (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre-Orientale).

de Weck (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (Canton de Fribourg — Suisse).

Wéry (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

Wilmotte (abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe (Namur).

Witz (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 104, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Wolf, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.

de Wouters (chanoine). — Braine-le-Comte.

de Wouters (Cher Lambert), Rotselaer, par Wespelaer (Brabant).

Wouters (abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

Zech (Guillaume), négociant. — Braine-le-Comte.

Liste des membres décédés.

(Juin 1889-août 1890.)

[illegible] . . . . Melle.
[illegible] . . . . Santiago.
[illegible] de Croÿ . . . . Le Rœulx.
[illegible] . . . . Menin.
[illegible] . . . . Bruxelles.
[illegible] . . . . Louvain.
Abbé Ducrost . . . . Solutré.
[illegible] . . . . Liège.
[illegible] . . . . Louvain.
[illegible] . . . . Mons.
[illegible] . . . . Louvain.
[illegible] . . . . Bruxelles.
C[illegible] de Namur d'Elzée . . . . Dhuy.
R. P. Perry, S. J. . . . . Stonyhurst.
[illegible] Peyrot . . . . Anvers.
Gaston Planté . . . . Paris.
R. P. Rathouis, S. J. . . . . Zi-ka-wey.
C[illegible] van den Steen de Jehay . . . . . Bruxelles.
Abbé de [illegible] . . . . Zeelst.

Listes des membres inscrits dans les sections.

1re Section.

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM. d'Abbadie.
Adan de Yarza.
R. P. Alcolado, S. J.
Chan. di Bartolo.
Baule.
Théodore Belpaire.
Pce Boncompagni.
Boussinesq.
du Boys.

MM. Breithof.
de Bussy.
Carnoy.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
R. P. Delsaulx, S. J.
De Tilly.
Dusausoy.

MM. Dutordoir.
Eynaud.
Gauthier-Villars.
Abbé Gelin.
Ph. Gilbert.
Goedseels.
Bon G. Greindl.
de Grossouvre.
Cte François de Grunne.
Guyétand.
Haton de la Goupillière.
Hermite.
Iñiguez.
Général Jacmart.
Jenner.
Jimeno.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
Lacor.
Charles Lagasse.
Lambert.
R. P. Dom Lamey.
Le Paige.
Cte Charles de Liedekerke.
de Lisleferme.
R. P. Lucas, S. J.
Mansion.
Général de Marsilly.
Cte de Maupeou.

MM. de Mendizabal.
Micha.
Général John Newton.
Nisot.
J. Nyssens.
P. Nyssens.
d'Ocagne.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
M. Perez.
Chanoine Piscé.
Vte de Salvert.
Sanz y Lopez.
P. Sanz.
Cte de Sparre.
Stoffaes.
Suttor.
Teixeira.
R P. Thirion, S. J.
Timmermans.
Torroja.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Cte Aymard d'Ursel.
E. Vandenpeereboom.
Abbé Van Zeebroeck.
Vicaire.
Villafuerte.
Villié.
Witz.

2e Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.

MM. Alfageme.
Béchamp.
Blondel.
Bonamis.

MM. Branly.
Bruylants.
Chautard.
R. P. De Greeff, S. J.

MM. Abbé Delorge.
De Preter.
François Dewalque.
Dincq-Jordan.
André Dumont.
Feliù y Perez.
R. P. François, S. J.
R. P. George, S. J.
R. P. Granero, S. J.
Grisar.
Hector Henry.
Louis Henry.
Kennis.
Jules Lagasse.
Lambiotte.
Lemoine.
Malisoux.
Mertens.

MM. Misonne.
M[is] de Montgrand.
Mullenders.
Ouverleaux-Lagasse.
Pichault.
Abbé Pirard.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
R. P. de Regnon, S. J.
Springael.
Theunis.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
Van Biervliet.
Vander Voordt.
R. P. Van Tricht, S. J.
R. P. Viñes, S. J.

3e Section.

Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

Mgr Abbeloos.
MM. d'Acy.
Fr. Alexis.
Arcelin.
Baguet.
Baillon.
Abbé Bardin.
Ern. Bayet.
C[te] H. de Beauffort.
M[is] de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Boulay.
Abbé Bourgeat.

MM. Anatole Buisseret.
Joseph Buisseret.
Firmin Casarès.
Abbé De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.
Chanoine Delvigne.
Abbé Descamps.
Abbé Detierre.
Gustave Dewalque.
Dollo.
Dugniolle.
Albert Fauvel.

MM. R. P. Fita, S. J.
Floren.
Foerster.
Fontaine.
Abbé de Foville.
R. P. Gerste, S. J.
Grinda.
Chan. Hamard.
Cte de Hemptinne.
Cte d'Hemricourt de Grunne.
Abbé Hervier.
R. P. Kirsch.
de Kirwan.
Kürth.
A. de Lapparent.
Abbé Ferdinand Lefebvre.
Cte G. de Lichtervelde.
Cte Adolphe de Limburg Stirum
Édouard Martens.
Martinez y Saez.
Magens Mello.
R. P. Mir, S. J.
Abbé Monchamp.
Mis de Nadaillac.
Perez Moreno.
Puga.
Abbe Rachon.

MM. Abbé Renard.
Ramirez.
Risueño
Ém. de la Roche.
R. P. Rojas, S. J.
R. P Schmitz, S. J.
H. Siret.
L. Siret.
Abbé Smets.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
John Storms.
R. Storms.
Chanoine Swolfs.
Charles de la Vallée Poussin.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Abbé G. Van den Gheyn.
Van Drèche.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Van Segvelt.
Abbé Verhelst.
R. P. Vicent, S. J.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4e Section.

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Barcia Caballero.
Borginon.
Bourdeau.
Bribosia.

MM. Charlier.
P. J. E. Craninckx.
Cuylits.
Debaisieux.

MM. Desplats.
A. Dumont.
Faucon.
Feijeiro.
Francotte.
Gallez.
Goix
Goris.
Haan.
R. P. Hahn, S. J.
Heymans.
Houze.
Janssens.
Alexandre Lagasse.
Lahousse.
Lebon.
Ledresseur.

MM. Leemans.
Dr Lefebvre.
Masoin.
Matagne.
Miot.
Mœller.
Proost.
Reynaert.
Schobbens.
Struelens.
Van Dorpe.
Van Ermengem.
Van Keerberghen.
Venneman.
Verriest.
Warlomont.

5e Section.

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle.

MM. Berleur.
de Borman.
Jules Cartuyvels.
Pce Juste de Croy.
Davignon.
De Baets.
Camille De Jaer.
De Lantsheere.
Dohet.
de Gerlache.
Grandmont.
Grenier.
Bon de Haulleville.

MM. Cte de Hemptinne.
Houtart.
Claudio Jannet.
Legrand-Benoît.
Cte Ferdinand Le Grelle.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Mayer.
Chev de Moreau d'Andoy.
Otto.
Pecher.
de Ponthière.
Pce de Rubempré.

MM. Henri Saey.
Smekens.
Stinglhamber.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.
t'Serstevens.
Vander Smissen.

MM. van Zuylen-Orban.
Vte Vilain XIIII.
Cte Amédée Visart.
Abbé Walravens
Wasseige.
Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL.

1889 - 1890.

—

Président, M. Paul Mansion.
1er *Vice-Président,* M. A. Witz.
2e *Vice-Président,* M. le Chanoine Delvigne.
Secrétaire provisoire, R. P. George.
Trésorier, M. Jules De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
L. Cousin.
Fr. Dewalque.
G. Dewalque.
André Dumont.
Ph. Gilbert.
Ed. Goedseels.
L. Henry.
Général Jacmart.
Ch. Lagasse.
Dr Lefebvre.
Dr Moeller.
A. Proost.
L. t'Serstevens.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.

MEMBRES DU CONSEIL.

1890-1891.

Président, M. E. Domet de Vorges.
1er *Vice-Président*, M. le Dr Lefebvre.
2e *Vice-Président*, M. G. Dewalque.
Secrétaire, M. P. Mansion.
Trésorier, M. Jules De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
Chanoine Delvigne.
Colonel De Tilly.
Fr. Dewalque.
André Dumont.
Ph. Gilbert.
E. Goedseels.
Général Jacmart.
Charles Lagasse.
Dr Moeller.
A. Proost.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.
Chanoine Swolfs.
Léon t'Serstevens.
Ch. de la Vallée Poussin.

BUREAUX DES SECTIONS.

1889 - 1890.

—

1re Section.

Président, M. Ch. LAGASSE.
Vice-Présidents, MM. le Vte DE SALVERT et J. CARNOY.
Secrétaire, M. DUTORDOIR.

2e Section.

Président, M. LEMOINE.
Vice-Présidents, MM. WITZ et Fr. DEWALQUE.
Secrétaire, M. A. VAN BIERVLIET.

3e Section.

Président, M. DOLLO.
Vice-Présidents, M. le chanoine SWOLFS et le R. P. VANDEN GHEYN.
Secrétaire, M. Anatole BUISSERET.

4e Section.

Président, M. VENNEMAN.
Vice-Présidents, MM. CUYLITS et MOELLER.
Secrétaire, M. A. DUMONT.

5e Section.

Président, M. Paul DE GERLACHE.
Vice-Présidents, MM. DE MARBAIX et Ch. THIÉBAULD.
Secrétaire, M. L. DE LANTSHEERE.

BUREAUX DES SECTIONS.

1890-1891.

1re Section.

Président, M. Ph. Gilbert.

Vice-Présidents, MM. J.-M. De Tilly et M. d'Ocagne.

Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. G. Lemoine.

Vice-Présidents, MM. A. Witz et Fr. Dewalque.

Secrétaire, M. A. Van Biervliet.

3e Section.

Président, M. le chanoine Delvigne.

Vice-Présidents, M. le chanoine Swolfs et le R. P. Van den Gheyn.

Secrétaire, M. L. Dollo.

4e Section.

Président, M. Venneman.

Vice-Présidents, MM. Cuylits et Moeller.

Secrétaire, M. A. Dumont.

5e Section.

Président, M. Paul de Gerlache.

Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Ch. Thiébauld.

Secrétaire, M. L. De Lantsheere.

SESSIONS DE 1889-1890

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

La Société a tenu trois sessions pendant cette quatorzième année :

La première, le jeudi 24 octobre 1889.

La deuxième, le jeudi 23 janvier 1890.

La troisième, le lundi 14, le mardi 15 et le mercredi 16 avril 1890.

Première section.

Jeudi, 24 octobre 1889. — M. Mansion présente à la section, au nom de M. de Salvert, le chapitre V de son *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme.*

M. Gilbert communique la fin de ses recherches *Sur quelques formules d'un usage général dans la physique mathématique.* Le R. P. Delsaulx, à l'appréciation de qui le travail a été soumis, en propose la publication dans les *Annales.* Cette proposition est adoptée (Voir *Seconde partie*, pp. 1-18).

M. Gilbert fait ensuite l'historique des recherches récentes relatives à l'herpolhodie de Poinsot, et fait connaître une démonstration simple du théorème de MM. Hess et de Sparre sur la forme de cette courbe remarquable. Il entretient enfin la section d'un appareil de MM. Darboux et Königs, qui a figuré à l'Exposition de Paris et qui permet de tracer mécaniquement une

herpolhodie. La communication de M. Gilbert est insérée dans la *Seconde partie*, pp. 25-34.

M. Gilbert présente à la section un travail de M. de Sparre *sur le pendule de Foucault*. MM. Gilbert et Pasquier sont nommés commissaires pour faire rapport sur ce mémoire.

A propos d'une indication de M. Gilbert sur la manière dont M. de Sparre a traité la question du mouvement du pendule, M. Mansion fait observer qu'un moyen simple et naturel de vérifier le degré d'exactitude d'intégrales approchées d'équations différentielles, c'est de former les équations différentielles correspondant aux équations intégrales obtenues et de les comparer à celles que l'on avait à intégrer.

M. Mansion fait ensuite connaître à la section les travaux géométriques du P. Saccheri, un précurseur de Lobatschewsky, en 1733. Il résume d'abord comme il suit l'histoire de la géométrie non euclidienne, dans sa première période. Lobatschewsky (1793-1856) a publié ses recherches sur ce sujet à Kasan, en 1829 (et même en 1826) et en 1836, 1837, 1838; à Berlin, en 1837, dans le *Journal de Crelle* et, en 1840, dans une brochure spéciale. Il a résumé l'ensemble de ses travaux dans sa *Pangéométrie* publiée en français en 1855, à Kasan. Dans tous ces écrits, il expose scientifiquement la géométrie, en faisant abstraction du postulat de la parallèle unique.

Jean Bolyai (1802-1860) fit connaître, en 1832, dans un appendice à un ouvrage de son père, W. Bolyai, des idées tout à fait analogues.

La correspondance de Gauss avec Schumacher prouve que le grand géomètre de Gœttingue était arrivé aussi, avant 1831, au système de géométrie de Lobatschewsky et de Bolyai.

En 1854, à l'instigation de Gauss, Riemann, dans une leçon inaugurale publiée seulement après sa mort, soumit les bases de la géométrie à une étude approfondie, et trouva ainsi un système de géométrie différent à la fois de celui d'Euclide et de celui de Lobatschewsky.

On peut caractériser les systèmes d'Euclide, de Lobatschewsky et de Riemann par les relations

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Euclide)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\mathrm{Ch}\, a\eta = \mathrm{Ch}\, b\eta\, \mathrm{Ch}\, c\eta \text{ (Lobatschewsky)}, \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\cos a\varepsilon = \cos b\varepsilon \cos c\varepsilon \text{ (Riemann)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

qu'ils établissent entre l'hypoténuse a et les deux côtés d'un triangle rectangle ; ε et η sont des quantités constantes, que l'on doit supposer extrêmement petites dans les applications des géométries non euclidiennes au monde physique. Les cosinus qui entrent dans la formule (3) sont définis d'une manière purement analytique par le développement en série, $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 +$ etc.

On a imaginé d'autres systèmes de géométrie, caractérisés par des relations entre a, b, c, d'une forme différente des trois précédentes, mais ces systèmes n'ont plus aucun rapport avec la géométrie physique, comme l'a prouvé M. De Tilly (1879).

Il est facile de voir que, pour ε ou η décroissant indéfiniment, les formules (2) et (3) tendent indéfiniment vers (1) ; autrement dit, les géométries non euclidiennes diffèrent aussi peu qu'on le veut de la géométrie euclidienne et, par suite, s'appliquent comme elle au monde physique. La géométrie plane, dans le système de Riemann, est identique à la géométrie euclidienne sur une sphère. M. Beltrami (1868) a prouvé que la géométrie plane de Lobatschewsky est identique à la géométrie euclidienne sur la pseudosphère (surface engendrée par la développante d'une chaînette tournant autour de la directrice de celle-ci). Il en résulte l'impossibilité de démontrer le postulatum par un raisonnement de géométrie plane. En 1873, M. De Tilly a prouvé qu'aucun raisonnement géométrique quelconque ne pouvait conduire à une vraie preuve du postulatum. Autrement dit, la notion euclidienne de la droite ne contient pas le postulatum.

Après cet exposé historique, M. Mansion fait connaître le livre publié par le P. Saccheri, en 1733, sur les principes de la géométrie, et en donne une analyse détaillée, d'où il résulte que cet auteur est arrivé, un siècle à peu près avant Lobatschewsky,

aux premiers principes de la géométrie non euclidienne. Une erreur radicale sur l'emploi de l'infini en mathématiques a empêché l'ingénieux géomètre italien de faire, sous une forme explicite, la découverte de la géométrie générale. L'analyse du livre du P. Saccheri se trouve dans la *Seconde partie*, pp. 46-59.

M. Mansion fait enfin une communication *sur les postulats et les axiomes d'Euclide* (voir *Seconde partie* pp. 35-45).

Jeudi, 23 janvier 1890. — M. Gilbert fait rapport sur le mémoire de M. de Sparre relatif au pendule de Foucault, dont il est question plus haut, et sur un second travail de ce savant sur le même sujet, qu'il a reçu depuis la dernière séance. M. Gilbert propose l'impression dans les *Annales* de ces deux mémoires, que l'auteur, à sa demande, a fondus ensemble, après en avoir développé certaines parties. La section adopte les conclusions de M. Gilbert (voir *Seconde partie*, pp. 285 et suiv., le travail de M. de Sparre) (*).

M. Gilbert présente à la section un autre mémoire de M. de Sparre, *Sur le mouvement des projectiles*. Sont nommés commissaires, MM. de Tilly et Jacmart.

M. Mansion signale diverses généralisations de la formule approximative d'Ozanam ou plutôt de W. Snell :

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

Ainsi on a, avec une erreur toujours de même sens,

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-l^2t^2)(1-m^2t^2)}} = \frac{3t}{\sqrt{1-k^2t^2}+\sqrt{1-l^2t^2}+\sqrt{1-m^2t^2}}.$$

(*) La première partie du Mémoire de M. de Sparre, sous une forme un peu différente, a fait l'objet d'un Rapport de M. Resal, à l'Académie des Sciences de Paris, qui en a ordonné l'impression au *Recueil des Savants étrangers* (C. R., t. CXII, p. 769, séance du 13 avril 1891). La seconde partie a été analysée par M Gilbert, dans la séance de la première section du 30 octobre 1890 (*Annales*, t. XV, 1re partie.)

M. Gilbert communique le théorème suivant, qui n'a pas été remarqué, à sa connaissance, sur le mouvement d'un point qui décrit une conique par l'action d'une force dirigée vers un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance : *La vitesse du point mobile se compose de deux vitesses constantes, l'une normale au rayon vecteur, l'autre normale à l'axe focal de la trajectoire, et qui sont entre elles dans le rapport de l'excentricité au demi-grand axe.*

M. Pasquier fait connaître les derniers progrès de la question de l'unification de l'heure.

M. Gilbert communique une note préliminaire sur le *principe* dit de d'Alembert en dynamique, d'où il résulte que ce principe n'appartiendrait pas en réalité à ce savant. Il reviendra sur ce sujet dans une séance ultérieure, quand il aura complété ses recherches historiques.

M. Gilbert fait connaître à la section des recherches dues à deux géomètres allemands, sur l'extension des propriétés du cercle d'inflexion aux mouvements plans relatifs, extension dont lui-même s'est occupé dans un précédent volume des *Annales*.

M. Mansion expose ensuite les raisons pour lesquelles on doit démontrer, d'une manière purement arithmétique, le théorème fondamental de l'analyse algébrique. Les démonstrations de ce théorème, qui établissent l'existence d'une racine et prouvent en même temps que cette racine varie continûment avec les coefficients, peuvent recevoir une forme purement arithmétique. Telle est la démonstration de Lipschitz et probablement celle de Walecki. M. Goedseels croit qu'il en est ainsi, en effet, de celle de Walecki, qu'il a examinée à ce point de vue.

MM. Gilbert, Mansion et Goedseels échangent ensuite diverses observations sur la théorie des incommensurables.

Mardi, 15 avril 1890. — M. Mansion fait connaitre la démonstration récente de la formule de Stirling, due à M. Rouché, et indique en quoi elle l'emporte sur les précédentes. On peut établir, sous une forme un peu moins précise, la formule qui sert de point de départ à M. Rouché, par la considération de l'aire de l'hyperbole. Dans ce cas, on arrive à la formule

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n+\frac{\theta}{8n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Dans la démonstration de Rouché, θ est compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

M. d'Ocagne fait l'historique de la théorie des coordonnées parallèles, sur laquelle il a publié un opuscule il y a quelques années, en même temps que M. Schwering les faisait connaître en Allemagne, dans une publication analogue.

Dans la note ci-jointe, il établit la corrélation des systèmes de coordonnées parallèles de plan et de point respectivement avec les systèmes cartésien et pluckérien, en déduisant ces divers systèmes d'un système général.

« Soit OABC un tétraèdre de référence pris dans l'espace.

» Étant donné un point P, supposons que

le plan	PBC	coupe	OA	en	a,
»	PCA	»	OB	»	b,
»	PAB	»	OC	»	c,

» Nous poserons, en faisant l'hypothèse que les paramètres λ, μ, ν aient des valeurs fixes pour tous les points de l'espace, mais d'ailleurs quelconques, et que les segments soient pris avec leur signe,

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad x = \lambda\frac{Oa}{Aa}, \quad y = \mu\frac{Ob}{Bb}, \quad z = \nu\frac{Oc}{Cc},$$

et nous dirons que x, y, z sont les *coordonnées du point* P.

» De même, si un plan π coupe OA en α, OB en β, OC en γ, nous posons

$$(2) \quad . \quad . \; u = -\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{A\alpha}{O\alpha}, \quad v = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{B\beta}{O\beta}, \quad w = -\frac{1}{\nu}\cdot\frac{C\gamma}{O\gamma}.$$

et nous dirons que u, v, w sont les *coordonnées du plan* π.

» Cherchons, dans ce système, *l'équation du point et du plan unis*, c'est-à-dire la condition qui doit lier les coordonnées x, y, z aux coordonnées u, v, w, pour que le point P soit dans le plan π.

» A cet effet, prenons OA, OB, OC comme axes cartésiens OX, OY, OZ, et désignons par X, Y, Z les coordonnées du point P dans ce système.

» La définition même des points a, b, c donne

$$(3) \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} \frac{X}{Oa} + \frac{Y}{OB} + \frac{Z}{OC} = 1, \quad \frac{X}{OA} + \frac{Y}{Ob} + \frac{Z}{OC} = 1, \\ \frac{X}{OA} + \frac{Y}{OB} + \frac{Z}{Oc} = 1. \end{array} \right.$$

Mais, des égalités (1), on tire

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{x}{x-\lambda}, \quad \frac{Ob}{OB} = \frac{y}{y-\mu}, \quad \frac{Oc}{OC} = \frac{z}{z-\nu},$$

et les équations (3) deviennent

$$(4) \quad . \quad . \frac{\lambda X}{x.OA} = \frac{\mu Y}{y.OB} = \frac{\nu Z}{z.OC} = \frac{X}{OA} + \frac{Y}{OB} + \frac{Z}{OC} - 1.$$

» La condition que le point P se trouve dans le plan π s'exprime par

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \frac{X}{O\alpha} + \frac{Y}{O\beta} + \frac{Z}{O\gamma} = 1.$$

Mais des inégalités (2) on tire

$$\frac{OA}{O\alpha} = \lambda u + 1, \quad \frac{OB}{O\beta} = \mu v + 1, \quad \frac{OC}{O\gamma} = \nu w + 1,$$

et l'équation (5) devient

$$\lambda u \frac{X}{OA} + \mu v \frac{Y}{OB} + \nu w \frac{Z}{OC} + \frac{X}{OA} + \frac{Y}{OB} + \frac{Z}{OC} - 1 = 0,$$

ou, en vertu de (4),

$$(ux + vy + wz + 1)\left(\frac{X}{OA} + \frac{Y}{OB} + \frac{Z}{OC} - 1\right) = 0.$$

» Comme nous écartons le cas-limite où P serait dans le plan de référence ABC, auquel cas les coordonnées x, y, z de P seraient infinies, nous voyons que la condition se réduit à

(6) . . . . . $ux + vy + wz + 1 = 0.$

» Telle est l'équation du point et du plan unis.

» Si nous donnons aux paramètres λ, μ, ν les valeurs

$$\lambda = -OA, \quad \mu = -OB, \quad \nu = -OC,$$

et que nous rejetions le plan ABC à l'infini, nous avons à la limite

$x = Oa$, $y = Ob$, $z = Oc$ (coordonnées cartésiennes),

$u = -\frac{1}{O\alpha}$, $v = -\frac{1}{O\beta}$, $w = -\frac{1}{O\gamma}$ (coordonnées plückériennes).

» Si maintenant nous donnons à λ, μ, ν les valeurs

$$\lambda = -\frac{1}{OA}, \quad \mu = -\frac{1}{OB}, \quad \nu = -\frac{1}{OC},$$

et que nous éloignions le point O à l'infini, nous avons à la limite

$x = -\frac{1}{Aa}$, $y = -\frac{1}{B\beta}$, $z = -\frac{1}{Cc}$ (coordonnées parallèles du point).

$u = A\alpha$, $v = B\beta$, $z = C\gamma$ (coordonnées parallèles du plan).

» Et pour chacune de ces couples de systèmes l'équation (6) du plan et du point unis subsiste.

» Ce qui précède montre clairement que le système vraiment corrélatif du système cartésien est celui des coordonnées parallèles du plan. Le système plückérien a pour corrélatif celui des coordonnées parallèles du point. »

M. d'Ocagne termine sa communication en montrant les avantages nombreux de l'emploi du système de coordonnées parallèles dans un grand nombre de questions presque inabordables au moyen des coordonnées cartésiennes. L'auteur emprunte à la géométrie du plan un exemple très frappant par l'élégance du résultat obtenu et la simplicité des calculs d'où on le déduit.

M. d'Ocagne espère réunir, plus tard, l'ensemble de ses recherches sur les coordonnées parallèles en un seul mémoire, dont il demandera l'insertion dans les *Annales*.

M. Mansion observe, à propos de l'exemple qui termine l'intéressante communication de M. d'Ocagne, qu'elle constitue une nouvelle preuve de la vérité de cette remarque : chaque système de coordonnées s'applique tout naturellement à l'étude d'un certain nombre de questions correspondantes, qui ne peuvent guère être abordées à l'aide d'autres systèmes.

M. Mansion lit un rapport de M. De Tilly sur le mémoire intitulé : *Sur le mouvement des projectiles dans l'air*, première partie. *Mouvement de la projection du centre de gravité sur le plan de tir*, par M. le Cte de Sparre, professeur à la Faculté catholique des sciences de Lyon.

M. De Tilly propose à la section d'en ordonner l'impression dans les *Annales*, et d'adresser des remerciements à l'auteur.

Ces conclusions sont adoptées. Le mémoire de M. de Sparre et le rapport de M. de Tilly seront insérés dans le tome XV des *Annales*.

M. Mansion a fait le rapport suivant sur le travail intitulé : *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme*, par M. le Vte de Salvert.

« Nous avons rendu compte antérieurement des deux premiers chapitres du mémoire de M. de Salvert, consacrés, le premier, aux propriétés fondamentales des invariants différentiels Δ_1 et Δ_2 de Lamé et aux équations du mouvement de la chaleur en coordonnées quelconques; le second, à la recherche et aux propriétés caractéristiques des surfaces isothermes du premier et du second ordre.

Nous allons maintenant analyser les deux chapitres suivants, où la question de la détermination des systèmes orthogonaux triplement isothermes est traitée complètement dans un grand nombre de cas particuliers, et où elle est résolue quant à *la moitié* de la recherche dans le cas général.

Au début du chapitre III, l'auteur établit d'abord les équations aux dérivées partielles d'un système triplement orthogonal quelconque, trouvées par Lamé.

Il arrive à ces équations en opérant une substitution, inverse de celle de l'illustre géomètre, dans des formules qu'il a établies antérieurement dans son *Mémoire sur la courbure des surfaces.*

Dans ce même travail, il avait obtenu, entre les six courbures principales de trois surfaces appartenant à un système orthogonal triplement isotherme, des relations que l'on ne trouve pas dans l'ouvrage de Lamé; transformées de la même façon, ces relations lui fournissent le premier des deux groupes d'équations aux dérivées partielles de ce système, savoir :

$$P \frac{\delta Q}{\delta \varpi} \frac{\delta R}{\delta \psi} = Q \frac{\delta R}{\delta \psi} \frac{\delta P}{\delta \varpi} + R \frac{\delta P}{\delta \psi} \frac{\delta Q}{\delta \varpi}, \text{ etc.}; \quad . \quad . \quad . \quad . (1)$$

$$2PQR\left[Q\frac{\delta^2 P}{\delta \psi^2} + R\frac{\delta^2 P}{\delta \varpi^2}\right] = 2\left[Q^2 R\frac{\delta P^2}{\delta \psi^2} + QR^2\frac{\delta P^2}{\delta \varpi^2} - P^3\frac{\delta Q}{\delta \varphi}\frac{\delta R}{\delta \varphi}\right] + PG, \text{etc.}, \quad (2)$$

où φ, ψ, ϖ sont les fonctions définissant les coordonnées curvilignes, devenues variables indépendantes, comme dans les calculs de Lamé, et où

$$P = \frac{\Delta_1 \varphi}{\Delta_1 \psi \Delta_1 \varpi}, \quad Q = \frac{\Delta_1 \psi}{\Delta_1 \varpi \Delta_1 \varphi}, \quad R = \frac{\Delta_1 \varpi}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi},$$

$$G = P^2 \frac{\delta Q}{\delta \varphi} \frac{\delta R}{\delta \varphi} + Q^2 \frac{\delta R}{\delta \psi} \frac{\delta P}{\delta \psi} + R^2 \frac{\delta P}{\delta \varpi} \frac{\delta Q}{\delta \varpi}.$$

Le second groupe (2) n'est autre que celui posé par Lamé pour un système triplement orthogonal quelconque, mais toutefois développé complètement par le calcul des dérivées indiquées seulement par l'illustre auteur. Les trois équations (1) se réduisent, d'ailleurs, à deux, car on peut établir entre elles une relation identique non donnée par Lamé ; de plus, l'une d'elles peut être remplacée par la suivante, qu'il indique au contraire et qui correspond à un beau théorème découvert par lui :

$$\frac{\partial P}{\partial \psi}\frac{\partial Q}{\partial \varpi}\frac{\partial R}{\partial \varphi}+\frac{\partial P}{\partial \varpi}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\frac{\partial R}{\partial \psi}=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

d'après les conditions d'isothermie, P est d'ailleurs indépendant de φ, Q de ψ, R de ϖ.

Pour résoudre le problème que s'est proposé M. de Salvert, il faut d'abord intégrer de la façon la plus générale les équations (1) et (2), puis trouver, au moyen d'un autre groupe d'équations aux dérivées partielles qui lient x, y, z à φ, ψ, ϖ, les anciennes coordonnées en fonction des coordonnées curvilignes. Dans son chapitre IV, M. de Salvert résout complètement, et de la manière la plus heureuse, la première de ces deux questions. Mais le procédé ingénieux auquel il a recours repose sur des calculs dont la légitimité présuppose qu'aucune des six dérivées partielles qui entrent dans l'équation (3) ne soit nulle. Il ne s'applique donc pas directement aux cas particuliers où quelques-unes de ces dérivées (deux au moins, à cause de l'équation (3)) sont nulles. De là, la nécessité d'examiner préalablement tous ces cas particuliers. Tout le reste du chapitre III (pp. 157-260) est consacré à une discussion minutieuse de ces cas qui, géométriquement, correspondent aux systèmes triplement isothermes dont fait partie une famille de surfaces développables. Il ne se contente pas, dans ce chapitre, de l'intégration des équations (1) et (2), il achève, chemin faisant, la solution de la question en déterminant x, y, z par l'intégration du second système d'équations aux dérivées partielles dont il est question plus haut.

Voici l'énumération des problèmes spéciaux ainsi abordés successivement par M. de Salvert dans les cent dernières pages de son chapitre troisième.

1° Les six dérivées partielles de la relation (3) sont identiquement nulles. Le système se compose de trois séries de plans parallèles, perpendiculaires deux à deux.

2° Cinq des dérivées partielles sont identiquement nulles. Le système ne contient que des cylindres de révolution parallèles, des plans normaux suivant les génératrices et des plans parallèles. Pour ce second cas déjà, de même que pour les cinq suivants, l'auteur invoque les théorèmes relatifs aux propriétés caractéristiques des familles isothermes de surfaces démontrées par lui, dans ce but, au cours du chapitre II, et qui peuvent seuls fournir la certitude que les résultats analytiques renferment bien la totalité de la solution.

3° Quatre des dérivées partielles sont identiquement nulles. L'auteur, en se servant habilement des équations (1), (2), (3), montre que les deux dérivées non nulles doivent se rapporter toutes deux à une même fonction P, Q, R, puis il établit directement et indirectement que le système se compose de deux séries de cylindres isothermes parallèles, normaux entre eux, et de plans perpendiculaires à leurs génératrices.

4° Trois des dérivées partielles sont identiquement nulles. Ici encore, à cause des relations (1), (2), (3), ces dérivées nulles ne sont pas arbitraires. Chacune des trois fonctions P, Q, R doit avoir une dérivée nulle, mais deux de ces dérivées nulles doivent être prises par rapport à une même variable φ, ψ ou ϖ, et la troisième doit être prise par rapport à une autre variable. L'auteur détermine la nature du système, d'abord en s'aidant de considérations géométriques ingénieuses, puis au moyen de l'analyse; ensuite, il achève complètement la solution. Le système comprend, dans le cas actuel, des sphères concentriques, des plans méridiens passant par un diamètre de la sphère, et des cônes de révolution autour de ce diamètre.

5° Deux des dérivées sont identiquement nulles. Il faut, dans ce cas, que ces dérivées appartiennent à des fonctions différentes.

Deux cas subsidiaires sont alors à distinguer. En premier lieu, si les dérivées sont relatives à des variables indépendantes différentes, la détermination préalable de l'expression la plus générale de P semble présenter des difficultés considérables, mais cette détermination n'est pas nécessaire heureusement, dans ce cas particulier, pour la solution complète de la question. Par un choix convenable de nouvelles variables indépendantes, l'auteur ramène, en effet, pour ce cas, les équations du problème à une forme identique à celle déjà rencontrée lors du cas précédent 3°, relatif aux cylindres. Le système se compose, dans ce premier cas, de sphères concentriques et de deux séries de cônes isothermes ayant pour sommets le centre des sphères. L'auteur, dans une note, signale ce qu'il y a d'incomplet, sinon d'erroné, dans une assertion de Lamé, relative à la forme nécessaire des fonctions P, Q, R, assertion que semble infirmer l'expression obtenue *a posteriori* pour P. Toutefois, il ne nous paraît pas établi que cette expression de P ne puisse se mettre sous la forme indiquée par Lamé.

En second lieu, les deux dérivées nulles peuvent être prises par rapport à une même variable. Pour ce second cas, qui offre un exemple remarquable d'application de la réciproque (signalée antérieurement par M. de Salvert) d'un théorème dû à Lamé, la solution est obtenue en intervertissant les fonctions inconnues et les variables indépendantes. Le système se compose alors de plans passant par un même axe et de deux familles de surfaces de révolution autour de cet axe; les méridiens sont des ellipses et des hyperboles homofocales. L'auteur fait observer avec raison qu'il est assez curieux que, dans le cas précédent, la solution contienne une solution arbitraire, tandis que, dans le cas actuel, elle ne renferme que des constantes arbitraires.

Après avoir épuisé ainsi, dans le chapitre III, tous les cas spéciaux où deux des six dérivées partielles sont identiquement nulles, M. de Salvert peut aborder le cas général, dans le chapitre IV. Il peut multiplier, diviser les équations du problème et leurs transformées, par ces six dérivées, sans craindre d'introduire ou de supprimer des solutions.

Tout d'abord, après diverses transformations, dérivations, etc., il démontre que l'on a

$$P = [\Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi)]^n, \quad Q = [\Pi_1(\varpi) + \Phi_2(\varphi)]^n, \quad R = \gamma[\Phi_1(\varphi) + \Psi_2(\psi)]^n,$$

l'exposant n étant, pour le moment, encore indéterminé. En substituant ces valeurs de P, Q, R, évidemment trop générales, dans l'équation (3), et dans la somme des trois équations (1), on parvient à réduire à trois les fonctions qu'elles contiennent. On trouve

$$P = \alpha [\Psi(\psi) - \Pi(\varpi)]^n, \quad Q = \beta [\Pi(\varpi) - \Phi(\varphi)]^n,$$
$$R = \gamma [\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)]^n.$$

Une transformation des équations (2) permet ensuite de prouver que $n = 1$, résultat important, qui ramène dès lors les expressions à la forme assignée par Lamé sans démonstration, dans son ouvrage classique.

Une fois arrivé à ces expressions, l'auteur établit, en quelques pages, que *chacune des trois fonctions* Φ, Ψ, Π *satisfait à une même équation différentielle du cinquième ordre*, savoir, en appelant u l'une quelconque de ces fonctions,

$$D\left[\frac{1}{Du} D\left(\frac{D^3 u}{Du}\right)\right] = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

proposition remarquable, qui n'est énoncée ni dans l'ouvrage de Lamé, ni dans le mémoire de Betti sur la question. Toutes les solutions du problème non obtenues dans le chapitre III sont donc contenues virtuellement dans l'équation (4). Lamé, remarque M. de Salvert, a trouvé la solution complète, mais les raisonnements par lesquels il y est arrivé semblent si peu prouver qu'aucun cas n'est oublié, qu'il était indispensable, pour la validité de la théorie, de l'établir directement.

C'est ce que permet de faire l'équation (4).

On trouve, en l'intégrant,

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}=\sqrt{\mathrm{A}(\Phi^2+a^2)(\Phi^2+b^2)(\Phi^2+c^2)},$$
$$\Phi=-a^2 cn^2(g\varphi+h)-b^2\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h),$$
$$g=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{a^2-c^2},\quad k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

et des formules analogues pour Ψ, Π. Ces valeurs des trois fonctions Φ, Ψ, Π et les valeurs correspondantes de P, Q, R contiennent des constantes surabondantes qu'il s'agit de déterminer en exprimant que P, Q, R vérifient les équations (2).

Si l'on voulait faire directement cette détermination, on serait conduit à des calculs inextricables, où l'on devrait manier des équations contenant de six à sept cents termes. L'auteur introduit de nouvelles variables, de nouvelles constantes, les détermine toutes au moyen de dix d'entre elles, par la considération de valeurs spéciales des variables et parvient à prouver, au moyen de transformations nouvelles, que, sans plus particulariser les résultats obtenus, ils vérifient les équations (2).

Nous croyons inutile de transcrire ici les valeurs définitives de Φ, Ψ, Π. L'auteur termine le chapitre en démontrant la propriété suivante : Si l'on prend pour variables indépendantes les fonctions Φ, Ψ, Π à la place de φ, ψ, ϖ, l'expression, pour le cas le plus général, des trois invariants Δ, relatifs à ces nouvelles coordonnées, est exactement la même, à un même facteur constant près, que pour le système ellipsoïdal. Cela permet de *soupçonner* une remarquable connexité entre la solution du problème à résoudre dans le cas le plus général et le système ellipsoïdal; mais c'est dans le chapitre suivant que l'auteur mettra cette connexité en pleine lumière.

Tel est le résumé des chapitres III et IV du mémoire de M. de Salvert, sur lequel nous sommes chargé de faire rapport. Nous ne pouvons dissimuler qu'il y a, en plus d'un endroit, des longueurs de rédaction, mais c'est le seul défaut de ce travail con-

sidérable. Nous devons avouer d'ailleurs que certains détails un peu longs, que nous avons critiqués dans le chapitre II, lors de notre précédent rapport, étaient à peu près indispensables pour l'intelligence du troisième; et, sans doute, quelques-uns des passages qui aujourd'hui nous semblent inutiles ont aussi leur raison d'être, en vue de développements ultérieurs. Nous ne voulons donc pas insister sur le défaut indiqué ici en termes généraux.

Mais nous nous plaisons à signaler les qualités du mémoire de notre confrère de Lille. L'intégration d'équations aux dérivées partielles non linéaires, telles que les équations (1) (2) (et aussi les équations principales du chapitre II), constitue un problème réellement difficile, pour la solution duquel il n'existe aucune méthode générale. Lamé et les autres auteurs (*) qui ont traité la question des surfaces orthogonales triplement isothermes ont reculé devant la difficulté de l'intégration des équations (1) (2) et ont préféré obtenir la solution par d'autres voies. Autant que notre incompétence dans la théorie des surfaces nous permet d'apprécier la méthode directe et plus élémentaire de M. de Salvert, il nous semble qu'en ramenant l'intégration des équations (1) (2) à celle de l'équation unique (4), il a fait faire un progrès sérieux à la théorie des systèmes orthogonaux triplement isothermes. Sans doute, si Lamé avait rencontré cette équation (4), il aurait trouvé, dans la simplicité même de ce résultat, une raison suffisante pour croire qu'elle contenait implicitement, non seulement le point de départ de la recherche des systèmes orthogonaux triplement isothermes, dans le cas général, mais aussi dans les cas-limites, que M. de Salvert a étudiés si minutieusement dans son

(*) O. Bonnet a simplifié la solution de Lamé dans deux mémoires insérés dans le trentième cahier du *Journal de l'École polytechnique* et le tome XIV du *Journal de Liouville* (1849, pp. 401-416). Darboux a traité des questions plus générales dans le § XII de son mémoire *Sur les surfaces orthogonales* (Annales de l'École normale supérieure, 1886, t III, pp. 97-141) et dans les §§ XVII-XX de son *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (Ib., 2e série, 1878, pp. 101-150; 225-260; 275-348). Betti, *Sopra i sistemi di superficie isoterme e ortogonali* (Annali di Matematica, 2e série, t. VIII, pp. 138-145, 1877) esquisse la solution dans le cas général par une méthode originale, mais dont le point de départ est loin d'être élémentaire.

chapitre III. Au point de vue didactique, ce chapitre III est d'ailleurs un bel exemple de discussion complète de tous les cas particuliers d'une question. Rien n'y est oublié : l'auteur aborde et résout toutes les difficultés, au fur et à mesure qu'elles se présentent, sans redouter aucun calcul. Dans le chapitre IV, il subdivise non moins habilement la question, de manière à guider pas à pas le lecteur jusqu'au résultat final, sans jamais exiger de lui une trop grande contention d'esprit. L'exposition est d'une clarté extrême d'un bout à l'autre des cent trente pages dont se composent les chapitres III et IV du mémoire.

Nous proposons donc à la section de voter l'impression de ces deux chapitres dans le tome XIV de nos *Annales*, et d'y joindre l'introduction historique, où l'auteur indique à grands traits le but et l'esprit de son travail en même temps que l'état antérieur de la question (*). »

Mercredi, 16 avril 1890. — M. Mansion expose, sous une forme moderne, c'est-à-dire au moyen des déterminants, la méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées linéaires aux dérivées partielles. Sous cette forme, on voit que Lagrange a rencontré, sans s'en douter, le *facteur de Gilbert* qui, égalé à zéro, peut donner des solutions non comprises dans l'intégrale générale ; de plus, au fond, Lagrange démontre implicitement, dans son mémoire, le théorème fondamental de la théorie des déterminants fonctionnels. M. Mansion espère revenir sur ce sujet dans une séance ultérieure.

M. Mansion montre ensuite comment la méthode de Cauchy permet également de trouver le *facteur de Gilbert;* il entretient aussi la section de l'extension de la méthode de Gilbert à certains systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles, à plusieurs variables dépendantes, considérés par Jacobi. Ces deux communications seront publiées dans l'édition allemande de la *Théorie des équations aux dérivées partielles,* actuellement en préparation.

(*) Voir, 2e partie, pp. 71-284. L'introduction sera publiée ultérieurement.

M. Mansion communique quelques considérations sur la proposition du carré de l'hypoténuse considérée comme point de départ de la géométrie euclidienne. Il montre comment on peut déduire, assez péniblement il est vrai, de cette proposition, l'existence de triangles rectangles semblables, ce qui équivaut à la démonstration du postulat de la parallèle unique.

La section procède à l'élection de son bureau pour l'année 1890-1891. Sont nommés :

Président,	MM. Ph. Gilbert.
Premier vice-président,	J. M. De Tilly.
Second vice-président,	M. d'Ocagne.
Secrétaire,	H. Dutordoir.

Seconde section.

—

Jeudi, 24 octobre 1889. — Le R. P. De Greeff présente les observations suivantes au sujet de la détermination du point de fusion des substances organiques : « M. Landolt a entrepris plusieurs séries de mesures à l'effet de comparer les diverses méthodes de détermination du point de fusion. Il publie ses résultats dans la *Zeitschrift für physikalische Chemie.* Ces méthodes sont les suivantes :

« 1° Le thermomètre plonge directement dans la substance : on doit nécessairement disposer d'une quantité assez considérable de celle-ci ;

» 2° Un tube capillaire, ne renfermant qu'une très petite quantité de la substance, est fixé sur le réservoir thermométrique ;

» 3° Un fil de platine couvert de la substance à étudier fait partie d'un circuit électrique. La fermeture du circuit est produite par la fusion de la substance.

» D'après M. Landolt, la seule méthode irréprochable est la première; les deux autres donnent des résultats peu concordants. »

M. Van Biervliet analyse brièvement les recherches récentes entreprises au laboratoire de sir William Thomson, dans le but de déterminer les variations de température d'un noyau de fer doux dans l'aimantation. La méthode employée repose essentiellement sur l'emploi des soudures thermo-électriques. M. Van Biervliet montre qu'en abordant la question par voie indirecte on pourrait la résoudre avec une précision supérieure.

Connaissant la dilatation du fer doux, il suffirait de mesurer l'allongement du noyau pour déterminer la variation de température. Cet allongement peut être mesuré avec une très grande précision par la méthode des interférences lumineuses ; ce procédé permet de reconnaître aisément des variations de température de $^1/_{1000}$ de degré centigrade.

Jeudi, 23 janvier 1890. — M. Van Biervliet donne la description d'un aréomètre à poids et à volume variables, qu'il se propose de faire construire. Cet instrument fait connaître par de simples lectures, et sans le secours de poids gradués, la densité des solides et des liquides. Un flacon à densité de Regnault, mais plus léger et plus petit que le modèle des laboratoires, est placé à la partie supérieure d'un flotteur aréométrique immergé dans l'eau distillée. Le tube cylindrique du flotteur, divisé en centimètres cubes et dixièmes de centimètres cubes, fait connaître immédiatement les variations de la poussée en grammes et décigrammes. Le poids de l'appareil est réglé de telle façon que le flotteur marque zéro sous la charge du flacon vide. On a, d'ailleurs, déterminé par jaugeage la capacité V du flacon à densité.

Mode opératoire. 1° *Densité des solides.* — On introduit le corps solide dans le flacon vide ; la variation de poussée donne le poids p en décigrammes.

On achève de remplir le flacon avec de l'eau distillée ; soit maintenant π la variation de la poussée à partir de zéro ; p' étant le poids de l'eau déplacée par le solide, on aura :

$$V - p' + p = \pi, \quad p' = V + p - \pi.$$

2° *Densité des liquides.* — On remplit le flacon du liquide à étudier; on lit la variation de poussée p en grammes, et le volume V étant connu en centimètres cubes, on aura la densité

$$d = \frac{p}{V}.$$

Mercredi, 16 avril 1890. — La section décide le maintien de son bureau pour l'année 1890-1891.

Président,	MM. Lemoine.
Vice-présidents,	Witz et
	Fr. Dewalque.
Secrétaire,	A. Van Biervliet.

Troisième section.

Jeudi, 24 octobre 1889. — M. Buisseret annonce à la section que ses nouvelles fonctions au collège de Nivelles ne lui permettent plus de continuer celles de secrétaire de la troisième section. La décision de M. Buisseret étant irrévocable, sa démission est acceptée. La section vote, par acclamation, des remerciements à son ancien secrétaire pour le zèle qu'il a montré dans l'exercice de ses fonctions.

Elle procède ensuite à la nomination d'un secrétaire. M. Dollo est désigné pour remplir ces fonctions.

Il remercie l'assemblée de la confiance qu'elle vient de lui témoigner et cède le fauteuil de la présidence à M. le chanoine Swolfs, vice-président.

M. le chanoine Delvigne entretient alors la section d'une question à mettre au concours. Il propose, à la demande de M. Proost, le sujet suivant : *La fixation de l'azote par le sol et par les plantes au point de vue biologique et agricole.* La section adopte cette proposition et la transmettra au Conseil.

Le R. P. Van den Gheyn fait ensuite une communication sur l'*Origine asiatique des Nègres,* dont voici le résumé :

Les Nègres sont aujourd'hui répartis surtout dans deux des cinq parties du monde, l'Afrique et l'Océanie. Faut-il croire que leur habitat actuel fut aussi leur centre primitif de caractérisation? Cette théorie d'Agassiz n'a eu guère de succès, et les ethnographes ont plutôt cherché, les uns à montrer comment les Noirs auraient pu émigrer d'Afrique, les autres, par quelles voies ils auraient passé de Malaisie en Afrique.

Un système plus rationnel, déjà indiqué par Huxley, Richard Owen, Pickering, Schlagintweit, et que M. de Quatrefages a mis en pleine lumière dans ses récents ouvrages, ramène les Noirs au berceau traditionnel de l'humanité, en Asie.

Voici les preuves et le développement de cette thèse sommairement esquissés.

On constate, pour les Noirs d'Afrique et pour ceux de l'Océanie, de frappantes analogies entre les deux sous-types qui, de part et d'autre, se sont partagé la race. Ainsi les Nègres de Mélanésie, les Papouas, par exemple, sont pour la conformation cranienne (capacité et indices) de tout point semblables aux Guinéens d'Afrique; les Négritos d'Océanie ont pour pendant les Négrilles d'Afrique.

Une première conclusion ressort de ces faits : c'est que, pour interpréter raisonnablement les analogies anthropologiques, il faut admettre que le type noir s'est constitué sur une aire unique. Or, en étudiant les migrations des divers rameaux de la race nègre, on les voit converger vers un même point. Ce point d'incidençe ne serait-il pas le centre originel de formation?

Les plus méridionaux des Nègres océaniens sont les Australiens. Or l'anthropologie et la linguistique leur trouvent des rapprochements avec les Dravidiens de l'Inde (1), et M. de Qua-

---

(1) Nous n'ignorons pas toutes les objections qu'on peut faire à cette hypothèse, mais elles ne sont pas sans solution. Voir sur cette question : É. Houzé et Victor Jacques, *Les Australiens du Musée du Nord,* dans BULLETINS DE LA SOC. D'ANTHROP. DE BRUX., t. III; Hamy, REVUE D'ETHNOGRAPHIE, 1885, pp. 354-357, 468-470; J. Van den Gheyn, *L'Unité de la race australienne,* dans BULLETINS DE LA SOC. DE GÉOGR. D'ANVERS, 1886.

trefages se rallie entièrement à ces vues pour affirmer que les Australiens ont originairement habité l'Inde.

Si les Papouas ne laissent guère de traces en dehors de la Nouvelle-Guinée, la tribu des Karons (Négrito-Papouas) les relie aux Négritos des Philippines. La solution de continuité qui se remarque en Malaisie trouve son explication dans l'hypothèse que les Nègres Papouas étaient déjà descendus au Sud et que les Négritos de Malaisie ont été exterminés par la puissante invasion des Malais.

En Asie, les Négritos sont partout, aux Andaman, aux Philippines, à Formose, au Japon, dans la presqu'île de Malacca, chez les Moïs de l'Annam, en Chine, au milieu des Veddahs de Ceylan, dans l'Inde et jusque dans le Beloutchistan.

On le voit donc : quand on essaie de remonter aux origines des Nègres océaniens, c'est vers l'Asie et les régions centrales de ce continent que l'on se trouve ramené.

Mais ne faut-il pas admettre la solution inverse? Les Nègres n'ont-ils pas émigré d'Océanie en Asie? Cette objection tombe devant les deux faits suivants : en Océanie, les Nègres, surtout les Négritos, ne sont plus qu'à l'état sporadique, et dans l'hypothèse du centre océanien de formation on ne s'explique pas que le type si aberrant des Australiens serait au lieu d'origine de la race.

Du reste, il ne faut pas isoler les Nègres d'Océanie de ceux de l'Afrique : la question doit être résolue dans son ensemble.

Or, les Noirs africains attestent, dans leurs traditions, vagues toutefois, qu'ils sont venus en leur pays actuel par voie de migration. C'est surtout le cas pour les Hottentots et les Betchouanas. Du reste, l'observation directe confirme ces assertions. Même, à ne tenir compte que des caractères craniologiques, on va des Boschimans aux Betchouanas et de ceux-ci aux Bantous et à certaines tribus du Mozambique qui conduisent aux Soudaniens. A partir du Soudan, nous trouvons les Négrilles, et les Akkas du Haut-Nil nous ramènent assez près de l'Asie et du détroit de Bab-eb-Mandeb.

Les récentes explorations de M. Dieulafoy en Susiane ont fait

retrouver sur des bas-reliefs des représentations de guerriers nègres, et au sein de la population moderne au nord du golfe Persique, et sur les bords du détroit d'Ormuz, des restes de tribus noires. MM. Dieulafoy et Houssay ont constaté que c'étaient des Négritos, et M. de Quatrefages n'hésite pas à voir dans ce fait une confirmation de ses idées sur l'origine asiatique des Nègres.

Tout conduit donc à admettre que les Noirs ont eu jadis le même centre de formation que les Blancs et les Jaunes, à savoir l'Asie centrale. Les Noirs furent promptement envahis et repoussés jusqu'à la mer. Ils émigrèrent à l'est et à l'ouest : les uns, pour occuper successivement tous les archipels asiatiques, les autres pour aborder en Afrique.

On peut lire le développement complet de cette thèse dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, avril 1891.

A la suite de cette communication, M. Dollo fait quelques remarques appuyant certains points de la thèse du R. P. Van den Gheyn.

M. Proost pose alors la question suivante : « Que faut-il penser des races brachycéphales de la Meuse? »

Cette question provoque un échange d'observations entre MM. Dollo, Proost et De Lantsheere.

M. De Lantsheere donne ensuite une idée des travaux craniométriques de M. Benedikt, de Vienne.

M. Dollo fait une première communication sur les Mosasauriens de Mesvin, puis une seconde *Sur la différence entre le centre et le corps d'une vertèbre.*

« Que signifient des phrases comme la suivante, qui a trait aux vertèbres de l'*Iguanodon* : « Les centres semblent constituer » à eux seuls le corps de la vertèbre, autant que j'en puis juger » par l'*Orthomerus Dolloi*, Seeley. » ..... *In cauda venenum.* » (G. SMETS. *Un mot de réponse à M. L. Dollo* Hasselt, M. Ceysens, 1889, p. 12.)

Le *centre* d'une vertèbre est l'*élément* situé ventralement au canal neural.

Le *corps* d'une vertèbre est la *région* par laquelle deux vertèbres s'articulent autrement que par leurs zygapophyses.

Lorsque cette articulation se fait uniquement par le centre, celui-ci constitue à lui seul le corps de la vertèbre : tel est généralement le cas chez les Reptiles.

Lorsque cette articulation se fait simultanément par le centre et par une partie des neurapophyses (*champs centroïdaux*), il faut distinguer le *centre* et le *corps* de la vertèbre. On a, alors : *corps* = *centre* + *champs centroïdaux*. Tel est généralement le cas chez les Mammifères.

On doit ces observations à M. P. Albrecht (*Die Epiphysen und die Amphiomphalie der Säugethierwirbelkörper*. ZOOLOGISCHER ANZEIGER, 1879, pp. 161 et 162).

Enfin, M. Dollo communique la note suivante *Sur un Sirénien miocène de Boom*.

Les ossements dont il s'agit ont été recueillis dans les « Sables d'Edeghem à *Panopæa Menardi* » ; ils comprennent la plus grande partie du squelette ; le crâne mesure, en projection, $0^{m}.46$ de long.

Ces ossements appartiennent à un genre nouveau, *Miosiren*, dont voici la diagnose :

Formule dentaire supérieure : *i* 1, *c* 0, *pm* 3, *m* 4.

Les incisives sont en forme de défenses, comme chez *Halicore*.

Les prémolaires sont sensiblement de même volume et de structure simple.

La dernière molaire est la plus simple et la moins volumineuse de la série.

Il y a 20 vertèbres dorsales.

Toutes ces vertèbres ont les facettes capitulaire et tuberculaire distinctes.

Il y a 17 vertèbres dorsales avec deux demi-facettes capitulaires séparées, pour deux côtes différentes, à chaque vertèbre.

Il y en a 3 avec une facette capitulaire, pour une seule côte, à chaque vertèbre.

Le sternum se compose de deux pièces : l'une antérieure, l'autre postérieure.

Les côtes s'insèrent au voisinage immédiat de la synchondrose des deux pièces sternales, sur un bourrelet cartilagineux en continuité avec le cartilage de cette synchondrose ; en outre, une paire de côtes s'attache en un point isolé du bord latéral de la pièce antérieure.

Le bassin indique, par ses rugosités, qu'il existait un fémur y relié à l'aide d'une masse ligamenteuse (comme chez les Cétacés).

Jeudi, 23 janvier 1890.— M. De Lantsheere fait une communication sur l'*Habitat primitif des Indo-Européens.* L'auteur en fournira un résumé pour les *Annales.*

M. Dollo fait ensuite une communication sur l'*Ostéologie du genre Plioplatecarpus.*

« Le Musée de Bruxelles a acquis récemment de beaux restes de *Plioplatecarpus,* qui viennent heureusement compléter ceux que cet établissement possédait déjà. Les restes dont il s'agit consistent surtout en un os carré magnifique et en vertèbres. L'os carré est particulièrement intéressant : en premier lieu, parce qu'il montre que, contrairement à l'assertion de Cuvier, le genre *Plioplatecarpus* est bien distinct du genre *Mosasaurus ;* et, en second lieu, parce qu'il est bulloïde et rappelle tout à fait la caisse tympanique des Cétacés. »

M. Dollo fait encore une communication sur le *Système nerveux des Némertiens.*

M. Proost fait une communication sur la *Fixation de l'azote par les plantes.* Il en a adressé au Secrétaire le résumé suivant :

« Les séries de cultures dans le sable lavé et calciné, que j'ai instituées au Jardin botanique de Louvain, ont démontré :

1° Que les légumineuses appartenant aux genres *lupins, anthyllis, pois,* fixent l'azote atmosphérique, mais exigent, pour végéter normalement, une minime quantité d'azote combinée dans le sol, sous forme de nitrate, au début de la végétation, contrai-

rement aux affirmations de M. G. Ville, qui prétend que *tout l'azote* vient de l'air;

2° Que certaines plantes, comme les pois, les lupins, l'anthyllis, l'avoine et les graminées rustiques de prairies, le sarrasin, la spergule, la pomme de terre, jouissent de la propriété d'assimiler la potasse insoluble du sable stérile de nos Campines et de nos Ardennes, potasse dont la présence n'était point décelée par les procédés d'attaque en usage dans les laboratoires agricoles (eau régale), ce qui a déterminé depuis les chimistes à modifier la méthode et à attaquer par l'acide fluorhydrique. Ce fait a été révélé par la *plante*, notamment par la pomme de terre à *dominante* de potasse, qui n'exigeait pas la restitution de cet élément dans le sable campinien servant à nos expériences;

3° Que le *phosphate tribasique insoluble* de la craie de Ciply est assimilé également par certaines plantes, comme *les pois*. Des pois, dont on a pris la photographie, ont fleuri et fructifié dans du sable stérile, additionné simplement de craie de Ciply à doses variées et arrosé d'eau distillée et, plus tard, d'eau de pluie. L'acide phosphorique ne pouvait donc provenir que de la craie phosphatée, comme la potasse du sable lavé du Rupel et de Campine.

Ces expériences ont été terminées en 1886. Dès 1884, elles ont été mises à la portée du public. En 1885, de nombreux visiteurs ont pu les contrôler. »

A la suite de cette communication, une discussion s'engage entre les membres de la section. Après quoi, M. le Cte van der Straeten-Ponthoz félicite M. Proost et la Société scientifique des résultats obtenus.

Lundi, 14 avril 1890. — M. Dollo fait la communication suivante sur les *Rhynchocéphaliens vivants et fossiles.*

Reprenant ses études sur le genre *Champsosaurus,* l'auteur en donne d'abord la diagnose rectifiée suivante :

Crâne allongé, longirostre. Os carré fixé. Dents implantées dans des alvéoles, mais soudées, par leur base, avec la paroi

osseuse qui les soutient. Cavité de la pulpe persistante. Dents réparties sur le pré-maxillaire, le sus-maxillaire, le vomer, le palatin, le ptérygoïdien et la mandibule. Dents de la voûte palatine innombrables, d'une ténuité extrême et disposées sans ordre apparent. Narines externes terminales. Choanes situées au milieu de la face inférieure du crâne et séparées par une mince cloison dentifère (vomers).

Élément splénial de la mandibule entrant dans la symphyse, qui est remarquablement longue. Pas d'apophyse coronoïde. Pas de projection post-articulaire pour l'insertion du muscle digastrique.

Pour le reste du squelette, l'auteur renvoie à son travail publié, en 1884, dans le BULLETIN du Musée de Bruxelles. Il compare ensuite le crâne de *Champsosaurus* à celui des autres Rhynchocéphaliens (*Hyperodapedon, Palæohatteria, Rhynchosaurus, Sphenodon*).

A la suite de cette communication, une discussion sur le transformisme s'engage entre MM. le chanoine Swolfs, Proost, de Vorges et Dollo.

M. Proost fait une communication sur les *Visiteurs d'un saule marceau.*

L'auteur signale, parmi les hôtes ou visiteurs des saules, les insectes appartenant à la famille des Hyménoptères et leurs parasites, négligeant systématiquement les insectes plus connus appartenant à d'autres familles, comme les Lépidoptères, les Coléoptères, les Hémiptères et les Diptères.

Il parle successivement des abeilles, des andrènes, des halictes, des cerceris, des méloës, des prosopis, des colletes, des sphécodes, des anthophores, des mélectes, des ichneumons, des osmies, des chrysides, des nomades, des guêpes, des bombus, des térébrants.

Cette communication a paru depuis *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (janvier 1891), sous le pseudonyme d'*Agricola.*

Mercredi, 16 avril 1890. — Le Fr. Alexis fait la communication suivante sur *L'Heure universelle :*

On est d'accord pour l'adoption du système américain des fuseaux horaires désignés par des lettres alphabétiques et même par des dénominations géographiques. On diffère seulement sur la lettre à attribuer au fuseau initial.

1. *M. de Nordling* voudrait appliquer l'*A* à ce fuseau (anglo-français); le *B*, au premier fuseau à l'est (allemand), et ainsi de suite.

2. *M. Schram* donne au fuseau initial (de Greenwich) la lettre *U*, parce qu'il exprime le temps *universel;* la première lettre alphabétique *A*, qui correspond à la première heure, s'adapte au premier fuseau à l'est (fuseau *Adriatique :* Autriche, Allemagne, Suède, etc.), et ainsi de suite.

3. Le frère *Alexis,* pour ne pas interrompre l'ordre alphabétique, propose d'affecter le *Z* au fuseau initial, parce qu'il marque le point de départ ou le *zéro* de la série des heures, comme aussi des longitudes; la première lettre alphabétique *A* appartient alors au premier fuseau à l'est; et ainsi de suite.

Le R. P. G. Schmitz, S. J., résume ensuite les dernières *Recherches bryozoologiques du Dr Ed. Pergens* (voir ANNALES, 2e partie, pp. 19-24), puis il expose les résultats d'une étude sur les *Phosphates de la Hesbaye,* qu'il espère publier prochainement dans le BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DE BELGIQUE (t. XVII, 1890).

Enfin, M. Meessen fait la communication suivante sur *Le noyau dans la cellule de levure :*

« Comme vous le savez, le noyau est un élément essentiel de toute cellule; sa présence est pour ainsi dire constante, au point que nous pouvons dire *a priori :* Toute cellule possède un noyau. Vous le rencontrez dans toutes les cellules animales, et quelques embranchements, comme par exemple les Arthropodes se distinguent par la beauté et le volume vraiment considérable

du noyau de certaines de leurs cellules. Les plantes, et parmi celles-ci je mentionne tout particulièrement les Monocotylédonées, possèdent également un noyau très intéressant : il n'y a que quelques espèces de champignons inférieurs qui, paraît-il, en seraient privées. Ainsi les microbes, au dire de certains savants, comme De Bary (de Strasbourg), Koch et Fraenkel (de Berlin), en seraient privés, ou, ce qui vaut mieux, on n'est pas encore parvenu à les mettre en évidence chez ces êtres. Quant à la levure de bière, la question de savoir si elle possède un noyau est assez discutée : sans que l'on soit, à notre connaissance du moins, arrivé à un résultat définitif, ce qui est certain, c'est que c'est chez la levure qu'on a isolé pour la première fois, si je ne me trompe, la nucléine; or, la nucléine est la substance caractéristique du noyau.

Quels sont maintenant nos moyens pour mettre en évidence le noyau dans une cellule? Il est des cellules où on le voit nettement, sans réactif aucun, et ceci arrive lorsque l'indice de réfraction du noyau diffère de celui du protoplasme cellulaire. Dans d'autres cas, il faut tâcher de modifier soit l'indice de réfraction du noyau, soit celui du protoplasme, et l'on arrive à ce résultat en faisant réagir, par exemple, une solution d'acide acétique à 2 °/₀ sur la cellule. C'est ainsi que l'on fait apparaître le noyau dans les cellules musculaires. Dans ce cas, il faut tâcher que le microscope vous donne l'*image de structure;* travaillez donc sans le condensateur Abbe. Enfin, pour faire apparaître le noyau, on peut encore se servir de la propriété que possède la nucléine de fixer certaines matières colorantes comme le carmin, l'hématoxyline, les différentes couleurs d'aniline. Dans ce cas, il est bon d'effacer l'*image de structure* que donne le microscope, et de faire apparaître l'*image de couleur* en usant du condensateur Abbe, qui envoie un cône lumineux très puissant sur l'objet à examiner.

En étudiant la question du noyau de la levure, nous nous sommes servi de cette dernière méthode : le réactif que nous avons employé est le vert de méthyle, qui, au dire de M. Carnoy, est le réactif le mieux approprié pour le noyau, soit pour le

décéler, soit pour le conserver dans sa forme et sa structure normales. Voici ce que nous avons vu : dans la plupart des cas, on pouvait distinguer nettement de petits points verts épars dans la masse protoplasmatique; dans d'autres cas, une masse verdâtre, à contours dessinés d'une manière confuse, plongeait au milieu de la cellule. La levure examinée à frais, et sans réactif, n'offrait absolument rien de pareil. Le noyau est un élément énigmatique, dit M. Carnoy, et ce mot mérite d'être souligné. Nous avons toujours considéré le noyau comme l'élément sexuel des cellules : c'est lui, en effet, qui joue un rôle si important dans la fécondation, c'est lui qui préside aux phénomènes de la division cellulaire (cinèse, sténose). Aussi dans le phénomène de la sporulation de la levure, que nous avons eu l'occasion d'observer dans une levure après séjour prolongé dans de l'eau sucrée pure — et je me permets d'ajouter ici que très probablement la sporulation est en rapport avec le manque de nutrition de la levure, à preuve l'eau sucrée pure, — dans le phénomène de la sporulation, dis-je, nous avons nettement distingué, au milieu du protoplasme qui allait se scinder, quatre points très réfringents, autour desquels allait se grouper le protoplasme pour former des spores. Ces points, nous les considérons comme des noyaux.

Mais ce n'est pas tout; il faut en outre que le noyau exerce son influence sur toutes les énergies cellulaires; aussi voyons-nous dans les cellules de sécrétion, c'est-à-dire des cellules dont l'activité est très intense, un noyau ramifié (grande filière), s'étendant dans toute la cellule; parfois même il peut affecter la forme d'un chapelet. Nous avons dit tantôt que nous avions observé dans presque tous les cas plusieurs points verdâtres dans la cellule de levure. Le noyau de cette cellule pourrait donc bien avoir la forme d'un chapelet dont les boules, dispersées dans l'intérieur des cellules, seraient reliées par de minces filets de protoplasme. Du reste, la levure est une cellule dont l'activité est grande ; elle détruit, d'après M. Duclaux, quatre à cinq fois son poids de sucre par jour.

Nous concluons donc :

1° La levure de bière a un noyau ;

2° Ce noyau affecte probablement la forme d'un chapelet;
3° Ce noyau préside au phénomène de la sporulation de la levure.

On procède enfin au renouvellement du bureau pour l'exercice 1890-1891. Sont élus :

Président,	MM.	le chanoine Delvigne.
Vice-Présidents,		le chanoine Swolfs et
		le R. P. Van den Gheyn, S. J.
Secrétaire,		L. Dollo.

Quatrième section.

—

Jeudi, 24 octobre 1889. — M. Verriest expose certaines considérations sur le sens musculaire, spécialement au point de vue de la parole. Cumberland a démontré que la représentation d'un mouvement que nous voulons exécuter ou auquel nous pensons simplement, ne se renferme pas seulement dans le cerveau, mais qu'elle se reflète aussi dans les divers organes qui doivent accomplir ce mouvement. C'est par la perception délicate du consentement ou de la résistance au mouvement de ses sujets qu'il est parvenu à deviner leurs pensées et à reproduire exactement leur écriture.

Au moment même où la pensée se produit, elle détermine par l'intermédiaire des nerfs un mouvement musculaire qui tend à la reproduire en acte. Ce qui est vrai pour les mouvements ordinaires ne l'est pas moins pour la parole. Stucker a constaté qu'il suffit de penser à une lettre de l'alphabet, à un mot quelconque pour qu'immédiatement, qu'on le veuille ou non, on vienne à les prononcer. Prenons, par exemple, le mot *maison*. A l'idée que ce mot éveille, les Français ferment les lèvres; les Allemands et les Flamands arrondissent la bouche comme s'ils voulaient siffler; les Anglais, au contraire, écartent les lèvres comme s'ils voulaient prononcer ce mot à haute voix.

M. Cuylits cite un cas de paralysie agitante avec tremblement des mains, douleur de tête, impossibilité pour le malade de s'alimenter seul. L'hypnotisme procura au malade une grande amélioration, bien que son cas eût été déclaré incurable.

Il rapporte, en outre, le cas d'un malade atteint de paralysie générale, et souffrant d'une névralgie dentaire qui céda à l'hypnotisme.

M. le Dr Struelens communique ensuite un cas remarquable de guérison obtenue chez une hystérique par la suggestion.

Enfin, M. le Dr Goris présente un malade chez qui il a observé, après la trachéotomie, une chéloïde intratrachéale dont il est aujourd'hui complètement guéri.

Jeudi, 16 avril 1890. — M. Huyberechts expose les symptômes de la période occulte de la tuberculose ou période de germination. Après avoir rappelé les divisions données par les principaux auteurs, il appelle l'attention de ses collègues sur les symptômes généraux suivants : essoufflement, toux, fièvre, anémie, hypocondrie, en faisant ressortir l'importance de chacun d'eux. Mais ce sont les symptômes locaux qu'il faut surtout considérer et qui se rapportent spécialement au mode de respiration. La respiration faible ou saccadée, l'inspiration rude se manifestant surtout dans la fosse sous-claviculaire doivent faire craindre la période de germination de la tuberculose. Le travail de M. Huyberechts a, d'ailleurs, paru dans les *Annales* (2me partie, pp. 63-70) de la Société, et chacun le trouvera certainement digne d'intérêt.

M. le professeur Lahousse entretient ensuite la section de l'influence qu'exerce le régime lacté sur l'élimination de l'acide urique. On sait que Rumanoff, se basant sur ses expériences, admettait en 1885 que le régime lacté ne modifie pas l'élimination urinaire de l'acide urique. Étonné de ces résultats, M. Lahousse refit ces expériences et fut amené à conclure que le

contraction durable de ces mêmes muscles. Et pour les ramener à l'état de repos, il fallait que le doigt reprît, mais en sens inverse, le chemin d'abord parcouru. L'excitabilité des sujets permettait de suivre le trajet de leurs muscles.

M. Luys a présenté à ses visiteurs une jeune fille russe, vraie polyglotte, et un commis voyageur parisien. La première avait assisté aux leçons du maître, mais elle prétendait ne rien connaître aux choses de l'hypnotisme. Et cependant, si on la mettait en état de somnambulisme, elle donnait un véritable cours sur l'hypnotisme, en reproduisant les leçons avec la plus grande fidélité, tant pour la parole que pour les gestes.

Au commis voyageur endormi, M. Luys a présenté un tube renfermant du cognac, pris au hasard au milieu d'autres tubes. Aussitôt, notre sujet s'est mis à reproduire le tableau de l'ivresse.

Opérant ensuite avec un tube qui contenait de la teinture de valériane (herbe aux chats), M. Luys a fait miauler son commis voyageur de la plus belle façon.

A la jeune fille, il a offert un tube contenant de la spartéine, principe actif du genêt. Aussitôt la glande thyroïde a enflé au point de prendre un volume cinq fois supérieur à son volume normal. L'hypnotisée s'est ensuite raidie dans l'attitude de l'opisthotonos, et il a fallu lui retirer précipitamment le tube, tant il y avait à craindre des accidents sérieux.

M. Luys a présenté ensuite à la jeune fille, et du côté gauche, un tube renfermant de la pilocarpine. Aussitôt sa figure s'anima, prit des couleurs et exprima un sentiment de bonheur qui correspondait au langage que tenait la jeune fille. Elle représentait une véritable scène d'amour.

Le même flacon, porté du côté droit, fit naître l'expression d'une vive répulsion accompagnée de gestes et de paroles de circonstance.

Enfin, le tube, placé au milieu du cou, fit dire à la jeune fille qu'elle éprouvait de l'indifférence et que, si le jeune homme y consentait, elle se déciderait à se marier.

M. Cuylits cite un cas de paralysie agitante avec tremblement des mains, douleur de tête, impossibilité pour le malade de s'alimenter seul. L'hypnotisme procura au malade une grande amélioration, bien que son cas eût été déclaré incurable.

Il rapporte, en outre, le cas d'un malade atteint de paralysie générale, et souffrant d'une névralgie dentaire qui céda à l'hypnotisme.

M. le Dr Struelens communique ensuite un cas remarquable de guérison obtenue chez une hystérique par la suggestion.

Enfin, M. le Dr Goris présente un malade chez qui il a observé, après la trachéotomie, une chéloïde intratrachéale dont il est aujourd'hui complètement guéri.

Jeudi, 16 avril 1890. — M. Huyberechts expose les symptômes de la période occulte de la tuberculose ou période de germination. Après avoir rappelé les divisions données par les principaux auteurs, il appelle l'attention de ses collègues sur les symptômes généraux suivants : essoufflement, toux, fièvre, anémie, hypocondrie, en faisant ressortir l'importance de chacun d'eux. Mais ce sont les symptômes locaux qu'il faut surtout considérer et qui se rapportent spécialement au mode de respiration. La respiration faible ou saccadée, l'inspiration rude se manifestant surtout dans la fosse sous-claviculaire doivent faire craindre la période de germination de la tuberculose. Le travail de M. Huyberechts a, d'ailleurs, paru dans les *Annales* (2me partie, pp. 63-70) de la Société, et chacun le trouvera certainement digne d'intérêt.

M. le professeur Lahousse entretient ensuite la section de l'influence qu'exerce le régime lacté sur l'élimination de l'acide urique. On sait que Rumanoff, se basant sur ses expériences, admettait en 1885 que le régime lacté ne modifie pas l'élimination urinaire de l'acide urique. Étonné de ces résultats, M. Lahousse refit ces expériences et fut amené à conclure que le

régime lacté diminue de moitié l'excrétion de l'urée urinaire. On trouvera également aux *Annales* (2me partie, pp. 60-62) le détail de ces résultats.

Enfin, M. Goris présente deux malades qu'il a observés avec M. Charlier : l'un a été atteint d'une ulcération syphilitique guérie; l'autre souffre encore d'une affection cancéreuse du larynx. Les recherches de M. Charlier le portent à croire que le bacille de Lustgarden pourrait ne pas être spécifique de la syphilis.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 24 OCTOBRE 1889.

M. le Dr E. Masoin, secrétaire de l'Académie royale de médecine et professeur à l'Université catholique de Louvain, a fait une conférence sur *le Magnétisme animal, son histoire, son influence, ses applications utiles et ses dangers,* dont voici le résumé :

Dès le XVIIe siècle, le magnétisme animal est pressenti, sinon démontré, par le Bruxellois Van Helmont et le Père Kircher. Un siècle plus tard, Mesmer fait accourir tout Paris à ses étranges expériences. Mais c'est surtout à notre époque que le magnétisme a pris sa grande vogue. M. Masoin retrace les épisodes de la lutte homérique qui, vers 1840, s'engage entre les magnétiseurs et l'Académie de médecine de Paris. Il montre ensuite le magnétisme entrant à pleines voiles dans la science par James Braid en Angleterre, James Esdaile aux Indes, Liébeault en France, et par les travaux des écoles de Nancy et de la Salpêtrière, et s'imposant désormais à la préoccupation universelle.

On ne connait pas encore quelle modification matérielle s'introduit dans l'intimité du système nerveux pour engendrer l'hypnose; il y a pourtant des phénomènes dont l'analyse, soigneusement établie, peut jeter du jour sur la question. L'hypnotisme porte le trouble dans l'admirable ordonnance du système nerveux central, qui intervient à la fois dans l'inconscience et l'automatisme des mouvements réflexes comme dans les fonctions les plus élevées de l'économie humaine. Dans l'hypnotisé, il y a rupture complète de cette harmonie : la volonté s'affaiblit, le sujet devient le jouet de celui qui le manie. C'est la ruine des facultés supérieures, l'automatisme prend la place de la liberté, et, généralement, l'élément inférieur domine en triomphateur. Bon nombre de théories ont vu le jour pour donner une explication plausible de ces perturbations graves. M. Masoin les énonce et les discute; il montre que ni le système de Prayer (concentration de la pensée et apparition de substances ponogènes), ni l'électro-dynanisme vital de Durand de Gros, ni la paralysie de l'écorce cérébrale, ni l'anémie du cerveau admise par Heidenhain, ni l'action inhibitive de Brown-Séquard, ni la force neurique et rayonnante (fluide de Mesmer) ne rendent suffisamment compte des phénomènes. Le problème reste à l'étude.

Quant aux *applications utiles* de l'hypnotisme, M. Masoin passe rapidement sur les données qu'il peut fournir aux théories psychologiques, sur les modèles vivants et les attitudes passionnelles qu'il procure aux arts plastiques; il insiste davantage, mais avec les réserves nécessaires, sur le rôle de la magistrature dans l'appréciation des révélations hypnotiques et de la responsabilité des prévenus ayant agi sous l'influence de l'hypnose, et sur l'utilité de l'hypnotisme comme traitement moral et agent d'éducation sur des natures mauvaises, absolument rebelles. Le conférencier s'attache surtout aux applications thérapeutiques de l'hypnotisme; il rapporte et discute les résultats obtenus à Nancy par le Dr Bernheim, par les Drs Fontan et Ségard à Toulon, Voisin à Paris, Desplats à Lille, Van Renterghem en Hollande. Il rappelle qu'en Belgique, quarante ans avant les

expériences actuelles, M. le D[r] Lefebvre, de Louvain, a inauguré de remarquables expériences hypnotiques.

Les *dangers* de l'hypnotisme sont graves à un double point de vue, dans l'ordre moral et dans l'ordre médical. Voilà pourquoi, aux applaudissements de l'assemblée, M. le D[r] Masoin a terminé sa brillante conférence par ces sages paroles : « On ne badine pas avec l'hypnotisme, ni en exhibitions publiques, ni en jeux de société ; il doit rester aux mains de la science sérieuse, qui n'en peut user que pour le bien de l'humanité. »

Après ce discours de M. Masoin, M. le D[r] Lefebvre a pris la parole et a appuyé les conclusions de l'orateur en citant quelques exemples empruntés à sa propre pratique médicale.

La *Revue des questions scientifiques* a publié la conférence de M. Masoin dans les livraisons d'octobre 1889, pp. 521-541 ; de janvier 1890, pp. 34-88, et d'avril 1890, pp. 353-394.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 23 JANVIER 1890.

M. Claudio Jannet, professeur d'économie politique aux Facultés catholiques de Paris, docteur en sciences politiques de l'Université de Louvain, a entretenu l'assemblée des *Problèmes économiques contemporains aux États-Unis.*

Dans cette communication, M. Claudio Jannet s'est surtout attaché à mettre en relief la dépendance réciproque de tous les pays, au point de vue économique et financier, dès qu'ils sont arrivés à un certain degré de développement. Cette loi se réalise d'une manière très frappante aux États-Unis. La même reprise des affaires qui s'est manifestée en Europe pendant l'année 1889, s'y fait sentir actuellement. Produits métallurgiques et tissus ont des prix en hausse dans le monde entier. Le flux et le reflux dans le mouvement des prix se produit désormais de l'un comme

de l'autre côté de l'Atlantique, à des intervalles de moins en moins longs.

Les États-Unis, à leur tour, subissent la concurrence des pays neufs pour les produits naturels, comme le blé, le maïs, le sucre, le pétrole, qui sont produits dans diverses régions et dont, grâce à la facilité et au bon marché des transports, les diverses provenances se font concurrence sur le marché général du monde.

En 1882, la production du pétrole du Caucase était de 2,214 tonnes, celle du pétrole des États-Unis de 11,851 tonnes. En 1888, la production du Caucase a monté à 8,049 tonnes et celle des États-Unis est descendue à 6,725 tonnes, et cette concurrence a neutralisé, même sur le marché américain, le monopole que s'était constitué l'*Oil Standard C°*.

M. Claudio Jannet étudie ensuite les efforts tentés par les États-Unis au *Congrès des trois Amériques*, réuni en décembre 1889 à Washington, pour constituer une vaste union douanière de tous les États américains, dans laquelle ils occuperaient une place prépondérante et qui leur permettrait d'écouler dans le Mexique, le Brésil et l'Amérique du Sud leurs produits manufacturés. Leur coût de production élevé les en élimine au profit des produits anglais, allemands et français. Le régime protectionniste dans lequel des coalitions puissantes d'intérêts font persister les États-Unis, empêchera cette union douanière d'aboutir pour le moment; mais le germe de l'idée est semé : il se développera le jour où le peuple des États-Unis, mieux éclairé sur ses véritables intérêts, modifiera son régime économique. En attendant, le Congrès, profitant des énormes excédents budgétaires dont dispose le Trésor, va consacrer des millions de dollars à subventionner des lignes régulières de paquebots sur tous les points de l'Amérique du Sud. Les relations commerciales entre les deux Amériques en seront certainement très multipliées.

La dépendance des États-Unis du système économique général du monde se manifeste également dans la *question de l'argent*. La richesse de leurs mines est pour eux une cause réelle d'embarras.

Les rapports officiels, dit le professeur Lexis, montrent que la richesse en argent des États et territoires du Pacifique est inépuisable, et que le développement de cette richesse dépend uniquement de l'extension des chemins de fer, des progrès de la science et du concours du capital et du travail. La baisse du prix de l'argent a principalement pour effet de laisser à l'état brut une grande quantité de minerais pauvres, qu'on ne fait qu'amasser dans l'espoir de la découverte de procédés de traitement plus économiques ou de la réhabilitation de l'argent. On découvre tous les jours de nouveaux filons, qui sont encore une source de bénéfices, même au prix actuel de l'argent, et qui font plus que combler les lacunes produites à d'autres places.

M. Claudio Jannet attaque ensuite scientifiquement la thèse du bimétallisme et s'appuie sur le remarquable travail publié, dans les *Annales de la Société scientifique*, par M. Jacobs en 1877.

L'or, par le progrès même de la civilisation et la hausse générale du niveau des prix, a remplacé définitivement l'argent comme étalon monétaire. Les États-Unis ont reconnu l'impossibilité de rendre à eux seuls son rôle monétaire au métal blanc. Les dollars d'argent que la Monnaie fait frapper dans les quantités déterminées par le *Bland bill* de 1878, sont immédiatement déposés dans les coffres du Trésor et sont représentés dans la circulation par des certificats de dépôt, *silver certificates*. Malgré la grande réduction des *banknotes* et des *greenbacks*, le point de saturation paraît atteint et, en vertu de la loi de Gresham, l'or américain commence à émigrer en Europe.

M. Claudio Jannet expose comment les efforts intéressés tentés par les États-Unis pour créer une union monétaire internationale, dont l'objet serait de réhabiliter l'argent au plus grand profit des propriétaires de mines, ont échoué fatalement. La thèse de l'*appréciation de l'or*, soutenue par un brillant économiste, d'après qui la baisse des prix survenue de 1888 à 1889 aurait été due à une raréfaction de la monnaie, est complètement démentie par la hausse des prix à laquelle nous assistons sans que la production des mines d'or ait augmenté, ni que l'argent ait été monnayé de nouveau.

Heureusement, un grand débouché est sur le point de s'ouvrir pour l'argent : c'est la Chine. Des chemins de fer sont en construction, et, comme toutes les réformes économiques s'enchaînent, il est en même temps question de frapper de la monnaie d'argent. Jusqu'ici toutes les transactions se faisaient plus ou moins par des monnaies de compte. La voie dans laquelle la Chine semble vouloir entrer nécessite une circulation monétaire solide et, à cause du niveau très bas des prix, l'argent s'impose. Cet immense empire, avec ses 400 millions d'habitants, peut en absorber des quantités énormes. C'est là, et là seulement, qu'est la solution de la question de l'argent.

M. Claudio Jannet donne ensuite des détails sur les *Pools* ou *Trusts,* par lesquels des coalitions de producteurs s'efforcent de monopoliser certaines branches d'industrie et d'élever les prix. Il étudie leurs ressemblances et aussi leurs différences avec les syndicats du même genre qui se sont produits en Allemagne, et qui sont connus sous le nom de *Kartelle.*

Il termine en montrant comment une *crise agricole* intense sévit actuellement dans certaines parties des États-Unis. Les terres situées entre les Alleghanys et l'Atlantique, au nord du Potomac, sont dépréciées encore plus que les terres européennes, par suite de la concurrence du Far-West et des États du Pacifique.

On trouve constamment dans les journaux de la Nouvelle-Angleterre des annonces comme celle-ci, tirée du *Springfield Republican* du 29 octobre 1889 :

N'ALLEZ PAS A L'OUEST

quand vous pouvez avoir une belle ferme de 150 acres (60 hectares), faisant un *home,* sur une bonne route, près de voisins, pour 850 dollars (4,400 francs), excellente terre : foin coupé à la machine, abondance de bois.

Cottage de belles dimensions, bonne grange, hangars, etc.

La ferme est bien située, seulement à un demi-mille d'une école, à 5 1/2 milles d'Orange, l'un des meilleurs marchés de l'État du New-Hampshire.

Dans l'ouest également il y a des souffrances agricoles, par suite du développement excessif de l'économie monétaire, du défaut d'équilibre entre la production agricole, qui se déprécie fatalement, et du renchérissement de tous les objets manufacturés, par suite du système protecteur. C'est la grande cause de la souffrance des *farmers*.

Les bonnes terres sont à peu près partout occupées, et le temps n'est plus où *l'oncle Sam avait une ferme à donner à chacun de ses enfants*. Aussi tend-on à apporter des entraves à l'immigration européenne et rend-on de plus en plus difficile la possession du sol par des étrangers.

Les conditions climatériques particulières à une grande partie du Far-West, notamment l'insuffisance des pluies, nécessiteront une intervention de plus en plus large du capital et de la science pour la mise en valeur de cette région : des phénomènes sociaux nouveaux en seront la conséquence et donneront à la physionomie du peuple américain quelques traits de ressemblance de plus avec la vieille Europe. La grande propriété et avec elle le fermage et le métayage se développent naturellement dans ces conditions économiques nouvelles.

Mais la grande propriété n'a qu'un rôle transitoire à remplir aux États-Unis. Elle se morcelle d'elle-même dès que la population augmente et qu'il y a une plus-value à réaliser. Les grands élevages de bêtes à cornes en liberté (*Ranches*) paraissent avoir fait leur temps. D'une part, la baisse du prix du bétail diminue leurs profits; d'autre part, les *settlers* qui s'établissent çà et là les gênent; surtout les pâturages naturels, dans ces territoires si secs, s'épuisent rapidement dès qu'ils sont trop pacagés. Le dernier rapport du commissaire de l'agriculture du Kansas établit que l'avenir de cette région est dans un mélange de culture et d'élevage parqué qui comporte une grande réduction des exploitations, et surtout dans l'utilisation des cours d'eau par l'irrigation. Mais ces travaux sont fort coûteux, et là encore la petite culture, avec le temps, pourra seule les rémunérer. C'est à elle que le dernier mot finira par rester aux États-Unis.

En résumé, la crise par laquelle passent les États-Unis est

passagère, et il faut, dit M. Claudio Jannet, compter, non seulement sur la *vis medicatrix naturæ,* mais aussi sur l'énergie du peuple américain pour amener, au bout d'un certain temps, le réajustement des rapports économiques.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU LUNDI 14 AVRIL 1890.

Rapport du Président.

M. Paul Mansion, président de la Société pendant l'année 1889-1890, lit le rapport suivant :

MESSIEURS,

Cette année encore, c'est au Président qu'incombe la mission de vous faire, sur la *Société scientifique,* le rapport qui, d'après nos traditions, rentre dans les attributions du Secrétaire général. C'est assez vous dire que, pendant l'année qui vient de s'écouler, nous n'avons pu, malgré tous nos efforts, combler le vide douloureux causé par la mort du P. Carbonnelle. Mais, grâce à l'impulsion que notre regretté fondateur avait donnée à la Société et au dévouement des membres du conseil, grâce surtout à l'activité et au zèle du R. P. George, ancien auxiliaire du R. P. Carbonnelle, dont la Compagnie de Jésus a bien voulu nous assurer l'aide pendant plus d'une année, nous avons pu faire face, sans trop de peine, aux difficultés de la situation.

Les publications de la Société ont paru en temps utile, comme par le passé. Le tome XII des *Annales,* dont l'impression était à peine commencée à la mort du R. P. Carbonnelle, a été distribué à tous les membres de la Société au mois de juin dernier. Le tome XIII est sous presse, et l'impression en est très avancée. Quelques feuilles du tome suivant, relatif à la présente année 1889-1890, sont également tirées. Avec un peu d'activité, nous espérons achever complètement la publication des deux tomes

XIII et XIV de nos *Annales* avant le 31 décembre de cette année et être ainsi complètement au courant.

Comme vous le savez, la publication de nos *Annales*, contenant les travaux des membres actifs de la Société, est l'un des buts principaux de notre œuvre. Nous formons, en effet, avant tout, une association pour l'avancement des sciences physiques et naturelles, association dont l'existence doit s'affirmer devant le monde savant par des recherches originales. Mais en prenant ainsi part, dans la mesure de nos forces, au mouvement scientifique contemporain, et en affirmant en même temps d'une manière éclatante nos convictions chrétiennes, nous atteignons du même coup le second but de notre association. Nous démontrons en effet, même aux incrédules les plus ignorants, qu'il n'y a aucune incompatibilité entre la Foi et la Science.

Il ne m'appartient pas d'émettre un jugement sur les mémoires contenus dans les deux volumes de nos *Annales* en cours de publication, ni d'en faire ressortir la valeur scientifique. Mais, pour l'un au moins, vous m'excuserez de sortir de cette réserve. Il y a quelques années, grâce à l'excellente situation financière de la Société, nous avons pu, comme vous le savez, organiser des concours et proposer des prix dans chacune de nos cinq sections. La question proposée par la section des sciences naturelles a provoqué, de la part d'un membre de la Société, une réponse qui a été jugée digne du prix, d'après un rapport de MM. Proost, Storms et Buisseret. Je suis heureux d'apprendre à ceux qui n'ont pu assister à la séance où ce résultat a été proclamé que c'est à un prêtre, M. l'abbé G. Smets, professeur de sciences naturelles au collège Saint-Joseph à Hasselt, qu'a été décernée notre première médaille. Son mémoire couronné porte, comme il convient à une société savante, sur un point très spécial : *la classification des Chéloniens* ; il ouvre la série des *Mémoires* publiés dans notre tome XIII. On accuse si souvent, en Belgique et ailleurs, et sans ombre de preuves, hélas! on accuse si souvent le clergé d'être hostile à la science, ou de se désintéresser des recherches scientifiques, qu'il faut saisir toutes les occasions de réfuter cette vieille calomnie. C'est pourquoi

j'ai cru devoir vous signaler spécialement le travail de M. l'abbé Smets, couronné par la Société; mais, je tiens à le dire, il ne constitue pas une exception : bien souvent nos *Annales* ont renfermé des mémoires émanant de membres tant du clergé séculier que du clergé régulier.

Je parlais tantôt de la médaille décernée à M. l'abbé Smets. A vrai dire, ce n'est là qu'une figure de langage. Accablé de mille préoccupations, le conseil n'a pu que récemment s'occuper de faire exécuter cette médaille. Mais notre collègue n'aura rien perdu à attendre. Nous nous sommes adressés à un artiste toujours prêt à mettre son crayon au service de toutes les pensées chrétiennes, M. le baron Béthune, de Gand. Il a bien voulu nous faire un projet de médaille, qui dépasse toutes nos espérances. M. Béthune est parvenu à traduire à l'œil habitué à lire le langage symbolique de l'art chrétien, la devise même de notre Société : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensus esse potest.* A la prochaine session, nous pourrons sans doute mettre sous les yeux de nos membres la médaille elle-même.

Depuis le mois d'avril 1889, la Société a publié quatre livraisons, 1400 pages, de la *Revue des questions scientifiques*, où ont été abordés, comme dans les volumes précédents, les sujets les plus variés de science vulgarisée dans le grand texte, de science plus sévère d'aspect dans le petit texte. Ceux d'entre vous qui ont assisté à nos sessions d'avril et d'octobre derniers, ont retrouvé dans la *Revue* les excellentes conférences de MM. Dollo, Witz, de Lapparent et Masoin. Mais elle renferme en outre d'intéressantes études sur l'anthropologie, l'archéologie historique et préhistorique, la linguistique, la géographie, la sismologie, l'astronomie, la microbiologie, l'art forestier, etc., etc.; puis des comptes rendus détaillés dont quelques-uns sont de vrais mémoires critiques sur les points les plus délicats de la physique générale ; enfin, d'innombrables renseignements sur les progrès de toutes les sciences de la nature. En revoyant d'un coup d'œil rapide, pour faire ce rapport, cette foule de données scientifiques accumulées dans la *Revue* sous une forme si appropriée au but que nous poursuivons, une

pensée d'admiration et une pensée de reconnaissance se sont présentées à mon esprit et à mon cœur. Une pensée d'admiration d'abord envers le R. P. Carbonnelle, qui a fondé et organisé la *Revue* sur un plan si excellent, qui a groupé autour de lui tant de collaborateurs dévoués, qu'il nous a suffi de continuer à suivre la voie qu'il nous a tracée pour que ce Recueil reste, dans le domaine des sciences de la nature, le meilleur journal de haute vulgarisation qui existe. Une pensée de reconnaissance ensuite envers le secrétaire provisoire, qui a bien voulu se charger, seul ou presque seul, de la publication de ces quatorze cents pages, de la correction des épreuves et de l'envoi de près de trois mille livraisons dans les diverses parties du monde. Nous prions le Révérend Père, nous prions la Compagnie de Jésus qui a bien voulu nous l'accorder comme auxiliaire, d'agréer en ce jour l'expression publique de notre gratitude.

J'ai à vous dire un mot maintenant d'une publication exceptionnelle de la Société, parce qu'elle me donne l'occasion de vous signaler une distinction flatteuse accordée à l'un de nos membres les plus dévoués. Il y a quelques années, M. Gilbert fit paraître dans les tomes VI et VII de nos *Annales* un mémoire important *sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif*. Ce travail considérable, inabordable à ceux qui ne sont pas familiarisés avec les plus savants hiéroglyphes de l'analyse mathématique, et où l'on trouve entre autres choses la belle découverte du barygyroscope, fut signalé spécialement aux aspirants à l'agrégation par le Ministre de l'Instruction publique de France. Nous avons dû le faire réimprimer pour suffire aux demandes. Mais le mémoire n'avait pas attiré l'attention seulement des professeurs du haut enseignement mathématique. Évidemment ce beau travail, après beaucoup d'autres du même savant, avait été remarqué spécialement par les maîtres de la science, à l'Institut de France. Aussi, tout récemment, l'Académie des sciences de Paris a nommé notre éminent confrère correspondant de la section de mécanique. Cette rare distinction n'a été accordée jusqu'à présent qu'à un

bien petit nombre de savants belges et aux plus illustres seulement, à Adolphe Quetelet, à Joseph Plateau, à M. P. Van Beneden de l'Université de Louvain. Nous sommes fiers, pour la Société scientifique, de l'honneur, bien mérité au reste, que l'Institut de France a fait à notre savant confrère, et je suis l'organe de tous nos membres en adressant à M. Gilbert les plus chaleureuses félicitations.

J'arrive maintenant, Messieurs, à la partie pénible de ma tâche de rapporteur. La situation de la Société est bonne sous le rapport des publications scientifiques, elle est meilleure même que nous ne pouvions l'espérer après la mort du R. P. Carbonnelle, vu la grande place qu'il occupait dans notre Association; la situation financière est excellente, comme vous allez l'apprendre de la bouche de notre trésorier; mais, hélas! il n'en est pas de même au point de vue du nombre de nos membres.

En 1889-1890, la mort nous en a enlevé quinze au moins, dont onze en Belgique et quatre à l'étranger, presque tous membres depuis l'origine de la Société et entièrement dévoués à notre œuvre, quelques-uns illustres par la naissance, par leur situation politique ou par le talent. Qu'il me suffise de vous citer le prince Juste de Croy; M. Delcour, ministre d'État; M. Bernardin, religieux Joséphite, dont la compétence en botanique industrielle était sans égale; le baron Michaux, ce chirurgien éminent dont la mort toute récente nous enlève aujourd'hui même le concours de ses collègues de l'Université de Louvain; en France, M. l'abbé Ducrost, qui publiait dans la *Revue*, naguère encore, un savant article d'archéologie préhistorique; M. G. Planté, dont le nom est indissolublement uni, dans l'histoire de la physique, à la théorie des piles secondaires; enfin, et par-dessus tous, le R. P. Perry, de la Compagnie de Jésus, un des membres qui honoraient le plus la Société par son caractère et son talent. La plupart d'entre vous ont lu dans la *Revue* du mois de janvier la substantielle notice que lui a consacrée le R. P. Thirion, et dans la presse catholique les pages émues écrites après sa mort, sous l'inspiration du Frère Roonez, qui avait assisté à ses derniers moments. Il me suffira donc de dire quelques mots de cette belle

carrière de religieux et de savant. Stephen Joseph Perry, né à Londres, d'une ancienne famille catholique, le 26 août 1833, entra dans la Compagnie de Jésus le 12 novembre 1853. Après d'excellentes études scientifiques, philosophiques et théologiques, il devint, en 1868, directeur de l'Observatoire de Stonyhurst et, en 1874, membre de la Société royale de Londres. Six fois, dit le P. Thirion, le P. Perry fut appelé par le gouvernement anglais à l'honneur de diriger de grand travaux astronomiques. C'est ainsi qu'il observa le passage de Vénus sur le soleil à Kerguelen en 1874, à Madagascar en 1882, et les éclipses du soleil de 1870, 1886, 1887, 1889, en Espagne, aux Antilles, en Russie, à la Guyane française. Dans ces diverses missions, il montra une habileté consommée, mais la dernière devait lui être fatale. Le 22 décembre, jour de l'éclipse, dit le récit auquel nous avons fait allusion tantôt, il était très souffrant. Appuyé sur un matelot, il se traîna péniblement jusqu'aux tentes, surveilla lui-même l'installation de ses instruments, dirigea ses hommes, et quand, après un moment d'attente inquiète, il vit que, grâce à une soudaine éclaircie, tout s'était passé à merveille : « Voici, dit-il, l'observation la plus réussie que j'aie jamais faite. » Le capitaine et les matelots poussèrent trois hourrahs d'applaudissement, mais l'illustre astronome, l'auteur principal de ce beau succès scientifique, était défaillant. L'amour de la science et du devoir accompli lui avaient rendu pour quelques heures sa vaillance et sa force; mais quand il eut regagné le navire anglais qui l'avait amené, ce fut pour ne plus se relever de sa couche de souffrance; il put encore dicter une note donnant à l'observatoire de Greenwich le résultat de ses observations, et ce fut tout; quinze jours après, le P. Perry était mort. L'Angleterre avait perdu l'un des plus nobles de ses enfants, et la Compagnie de Jésus un de ses religieux les plus éminents. Pour nous, membres de la Société scientifique, qui avons eu deux fois le bonheur d'entendre ici même le P. Perry nous parler de ses expéditions pour le passage de Vénus, qui avons admiré son dévouement à la science, inspirons-nous de son généreux exemple. Consacrons comme lui, à la gloire de Dieu, les faibles talents qu'il nous a donnés, en travaillant aux progrès de la science dans la mesure de nos forces.

C'est d'autant plus nécessaire que la Société scientifique traverse une crise. Comme je vous le disais tantôt, nous avons perdu un nombre de membres assez considérable depuis notre session d'avril 1889. Les défections ont été nombreuses, surtout en Belgique. On peut excuser jusqu'à un certain point ceux qui ne peuvent ni prendre part à nos réunions, ni s'intéresser directement aux recherches spéciales contenues dans nos *Annales*. Mais il n'en est pas de même pour nos abonnés à la *Revue des questions scientifiques*, car celle-ci s'adresse à tous les gens instruits. Aussi n'est-ce pas sans une douleur patriotique que nous avons vu trop d'anciens abonnés belges nous abandonner au moment même où la mort du R. P. Carbonnelle semblait inviter nos membres à montrer plus de dévouement à la noble cause de l'union de la Foi et de la Science.

Je m'adresse donc de nouveau, comme l'a fait maintes fois le R. P. Carbonnelle pendant les dernières années de sa vie, à ceux de mes compatriotes à qui la divine Providence a départi les dons de l'intelligence et de la fortune.

Je les exhorte à réfléchir, une fois de plus, à l'importance sociale, au XIX[e] siècle, d'une culture scientifique sérieuse. Si l'on ne s'initie pas, dans une revue catholique comme la nôtre, aux progrès récents des sciences de la nature, on le fera inconsciemment, sans s'en douter, à des sources impures, par l'intermédiaire des conversations, des journaux, des controverses contemporaines. L'atmosphère intellectuelle de notre temps est comme chargée de miasmes mortels; on ne les rend inoffensifs, on ne se vaccine contre eux qu'au moyen de la science sérieuse, épurée au contact de la philosophie chrétienne et de la Foi. Or, en langue française, il n'y a pas un autre recueil, servant, comme la *Revue des questions scientifiques*, d'intermédiaire entre les hommes instruits de toutes les classes et les savants catholiques, et permettant à tous de se tenir, non seulement sans danger, mais avec plaisir et profit, au courant des découvertes de la science.

Restons donc fidèles à la Société et à la *Revue;* revenons-y si nous les avons abandonnées momentanément; travaillons à les

faire connaître l'une et l'autre plus que nous ne l'avons fait dans le passé. Introduisons dans les familles chrétiennes où il y a des étudiants, des jeunes gens avides de s'instruire, nos livraisons trimestrielles; au bout de quelques années, elles y formeront comme un arsenal d'armes de choix pour la défense de la Foi. Contribuons chacun, dans notre sphère d'action, à la diffusion de la Société et de ses publications, et nous aurons bien mérité de la religion et de la science.

M. Jules De Bruyn, trésorier de la Société, lit ensuite le rapport suivant :

Situation au 1er avril 1890.

DÉBIT.

Frais de bureau, de banque et de recouvrement, fr.	420	55
— de sessions	343	»
Impression et expédition des *Annales*	4,101	11
Revue des questions scientifiques :		
a) Collaboration.	6,529	50
b) Impression	6,891	82
Aux secrétaires des sections (indemnités). . . .	750	»
Direction de la *Revue*	4,750	»
Prix de concours	500	»
Portrait du R. P. Carbonnelle	400	»
Avoir au 31 mars 1890	125,310	68
TOTAL. . . fr.	149,996	66

CRÉDIT.

Encaisse au secrétariat.	1,603	78
Dépôt à la Société générale	114,515	»
Compte à la Société générale. . . . . . . } Compte courant chez Delloye . . . . . . }	6,065	80
646 cotisations	9,690	»
1,023 abonnements.	18,122	08
TOTAL. . . fr.	149,996	66

M. le Président propose à l'assemblée de nommer MM. Lagasse et Otto comme commissaires chargés de vérifier le compte rendu du Trésorier. — Adopté.

Enfin, le Frère Alexis, M. G., de l'Institut des Frères des Écoles chrétiennes et membre de notre Société, fait une conférence sur *les explorations dans les régions intérieures de l'Afrique*. Il est préparé à traiter ce sujet par des travaux avantageusement connus et par des ouvrages que le public a favorablement accueillis. Il vient précisément de terminer un ouvrage spécial, intitulé *Stanley l'Africain*, et qui est bien le travail le plus succinct et en même temps le plus complet sur ce sujet d'actualité.

Pour le développement de sa conférence, le Frère Alexis se sert d'une vaste carte de l'Afrique dessinée par lui-même, à la demande du cardinal Lavigerie pour les conférences antiesclavagistes, et prêtée à la Société pour la circonstance.

Stanley a commencé sa carrière d'explorateur il y a vingt ans. Il est utile de résumer, avant de parler de cet homme vraiment extraordinaire, ce qui s'est fait avant lui en vue de révéler au monde civilisé les secrets de l'intérieur de l'Afrique, notamment pour ce qui regarde cette région que l'on appelle aujourd'hui la région des grands lacs.

Il y a quarante ans, toute cette partie de l'Afrique était inconnue. Ceux qui n'ont pas encore cinquante ans peuvent se souvenir qu'au temps où ils allaient à l'école, les cartes de l'Afrique portaient, pour toute indication à ces endroits-là, ces mots : *régions inconnues* ou *régions inexplorées*. Quelquefois le cartographe, s'inspirant de traditions obscures ou de vagues récits arrivés à la côte, inscrivait des fleuves et des lacs fantaisistes, dans l'ignorance des vrais fleuves et des vrais lacs, lesquels n'étaient pas indiqués sur les cartes, et pour cause.

A la vérité, les cartes de Mercator reproduisant les données de Ptolémée, figurent au delà de l'équateur deux grands lacs comme sources du Nil; mais cette opinion n'avait jamais été vérifiée, et les cartographes du siècle dernier les avaient trop systématiquement effacées de nos atlas.

Les premières connaissances positives relatives à ces régions de l'Afrique centrale remontent à 1856.

Des missionnaires protestants qui évangélisaient Mombava, au Zanguebar, avaient vu les monts Kénia et Kilima-Njaro; les indigènes leur avaient parlé d'un lac qui se trouvait dans l'intérieur.

La Société de géographie de Londres, préoccupée, comme toutes les sociétés scientifiques et géographiques, par le problème des sources du Nil, envoya en Afrique deux officiers de l'armée des Indes, les capitaines Burton et Speke. Cette première exploration importante eut lieu de 1857 à 1859. Burton eut la gloire de la découverte du grand lac *Tanganika*. Speke, au retour, vit la pointe méridionale du grand lac *Victoria*, qu'il déclara être la principale source du Nil (1858).

En 1862-1863, dans un second voyage avec le capitaine Grant, Speke revit le lac *Victoria* par la partie septentrionale, et redescendit la vallée du Nil jusqu'en Égypte. A Gondokoro, il avait rencontré Samuel Baker, qui, sur ses indications, alla découvrir l'*Albert Nyanza*.

Avant cette époque, David Livingstone, missionnaire protestant anglais, était parti de la colonie du Cap et s'était enfoncé dans l'Afrique inconnue. Il revint ensuite en Angleterre où il publia, sur la région du Zambèze, un ouvrage qui fit beaucoup de bruit en 1856. Le gouvernement anglais lui donna le diplôme de consul pour l'Afrique australe.

Livingstone, dont la vocation de voyageur pionnier de la civilisation chrétienne s'était puissamment déclarée, retourna en Afrique dès 1857, remonta le Zambèze et arriva à Saint-Paul de Loanda, chef-lieu de l'Angola portugais, sur la côte occidentale; puis, refaisant en sens inverse le même chemin, il se rendit à Kilimane, chef-lieu des établissements portugais du Mozambique.

Il est le premier voyageur qui ait traversé de part en part le continent africain.

Dans un second voyage, il découvrit le lac Nyassa, dont il a été beaucoup question naguère, à l'occasion du conflit anglo-portugais.

Puis Livingstone entreprit encore une expédition à la découverte des sources du Nil : il prétendait identifier ce fleuve avec le Louapoula sortant du lac Bangweolo, ou avec le Loualaba qu'il vit à Nyangoué.

Mais, cette fois, il sembla disparu pour toujours; l'Europe savante resta plusieurs années sans recevoir de ses nouvelles.

En 1870, la Société de géographie de Londres organisa deux expéditions à la recherche de Livingstone.

L'une partit de la côte occidentale de l'Afrique; l'autre, commandée par Cameron, prit pour point de départ la côte orientale. Aucune des deux n'aboutit.

Ce fut Stanley qui eut l'honneur de retrouver Livingstone, et c'est ici que commence l'objet principal de la conférence faite à la Société scientifique.

Le nom de *Stanley*, dit l'honorable conférencier, n'est qu'un nom d'emprunt, et l'Amérique n'est qu'une seconde patrie pour le célèbre explorateur. La vérité est qu'il est Anglais, né au pays de Galles, en 1841, et qu'il a reçu au baptême le nom de son père, *John Rowland.* Tout jeune et orphelin, il s'était expatrié, et c'est à la Nouvelle-Orléans qu'un épicier, son patron, lui fit porter son propre nom de Henry Morton Stanley.

En 1868, Stanley était à Madrid, en qualité de correspondant du *New York Herald,* lorsque son chef, Gordon Bennett, se trouvant de passage à Paris, le manda auprès de lui pour lui proposer de retrouver Livingstone. Rien que cela!

Stanley accepta, non sans hésitation. Jusqu'à ce jour il avait été berger, sous-instituteur, débardeur, commis d'épicier, soldat, officier, reporter-correspondant d'un journal; mais il ne paraît pas qu'il pensât alors à devenir explorateur.

Il accepta, disons-nous, et ce fut en journaliste épris de la profession. « Pour moi, a-t-il dit plus tard, Livingstone n'était alors qu'un article de journal. » Il s'en allait en reportage!

Ce n'est pas en ligne droite qu'il se rendit en Afrique. Avait-il besoin de ce qu'on appelle, en style très moderne, un entraînement? Toujours est-il qu'il gagna Zanzibar par Constantinople, Jérusalem, le Caucase, la Perse, l'Inde anglaise. Un vrai chemin

des écoliers. De tous ces pays, il envoya des correspondances à son journal. Enfin, il s'embarqua à Bombay pour l'Afrique, sur un navire de commerce.

Arrivé à Zanzibar, il organisa tant bien que mal une caravane d'une centaine d'hommes. Il n'avait pas d'expérience en la matière. Il s'est formé depuis. Il comptait sur son étoile ou, pour mieux dire, il espérait que Dieu l'aiderait. Tous les hommes providentiels ont de ces audaces.

Où allait-il? A l'aventure. Mais en avançant dans l'intérieur, il entendait parler d'un vieil homme blanc qui se trouvait toujours plus loin. Dans la région du Tanganika, il se trouvait sur une place publique lorsqu'il s'entendit adresser ces mots, fort peu étonnants en mille autres endroits de la terre : *Good morning, sir.* Pendant qu'il cherchait dans le groupe des noirs quel était celui qui lui avait tenu ce langage inusité dans l'Afrique intérieure, le même salut lui fut adressé, venant de gauche cette fois. Deux minutes après Stanley apprenait de deux serviteurs fidèles de Livingstone que le « vieil homme blanc » était là, à Ujiji, dans sa case. La rencontre des deux illustres explorateurs est un de ces événements historiques qu'il faudra raconter à nos descendants dans toute leur simplicité grandiose.

« Bonjour, docteur, dit Stanley à Livingstone. Je remercie Dieu de ce qu'il m'a accordé l'honneur de vous retrouver!

— Je suis heureux, répond Livingstone, d'être ici pour vous recevoir. »

A cette occasion, il y a lieu de faire remarquer que Stanley est profondément religieux. Il a, à un degré très remarquable, ce qu'on peut appeler le sens chrétien.

Livingstone était malade, épuisé, réduit, comme il le dit lui-même, à l'état de squelette. L'arrivée et les bons soins de Stanley le remirent sur pied; mais il refusa de revenir à la côte avant d'avoir étudié la question des sources du Nil. Il repartit donc pour l'intérieur et alla mourir, le 4 mai 1873, au sud du lac Bangweolo.

A peine de retour à la côte orientale, Stanley se rendit à Londres, d'où il repartit aussitôt pour la côte occidentale d'Afri-

que et il assista, en qualité de reporter militaire du *New York Herald*, à la campagne des Anglais contre les Achantis et à la prise de Coumassie.

Stanley se trouva à Londres le jour des funérailles solennelles de Livingstone; il fut un des porteurs des coins du poêle. L'opinion publique, méfiante, avait été obligée de croire au succès de son expédition, quand il eut produit les lettres et notes que Livingstone l'avait chargé de faire parvenir en Europe.

Stanley n'était pas d'humeur à s'établir, comme un simple bourgeois ou comme un explorateur de moyenne envergure, dans une honnête villa pour y raconter ses voyages aux amis et voisins. C'est pourquoi le *Daily News* et le *New York Herald* se mirent d'accord pour faire les frais d'une nouvelle exploration et le renvoyer en Afrique, où il y avait tant à faire!

Dans ce nouveau voyage, Stanley fit la circumnavigation du Victoria Nyanza et traça la seule carte que l'on connaisse encore de ce lac. Il séjourna dans le royaume d'Ouganda, où il essaya de convertir au christianisme le roi Mtésa, et où, à son appel, vinrent bientôt s'établir des missionnaires anglais et français.

De là, il va découvrir le lac Mouta-Nzighé, puis faire la circumnavigation de Tanganika. Enfin, s'aventurant audacieusement dans le centre mystérieux de l'Afrique, il descend le Congo. Après de longs mois et une série d'aventures, parmi lesquelles il faut compter trente-deux combats livrés aux riverains cannibales, il arriva à l'embouchure de ce fleuve, à Boma. Des 380 hommes qu'il avait engagés à Zanzibar, comme porteurs et soldats d'escorte, 113 seulement étaient encore en vie. Les trois blancs qui étaient partis avec lui, Baker et les deux Pockock, étaient morts à différentes étapes.

Il avait fallu trois ans, de 1874 à 1877, pour accomplir cette traversée africaine, la plus fructueuse en données géographiques et en conséquences politiques de toutes les expéditions faites dans cette partie du monde.

Ce ne devait pas être la dernière.

En 1876, le roi Léopold II avait constitué à Bruxelles une « Association internationale pour la civilisation de l'Afrique cen-

trale ». Au moment où le capitaine Cambier et d'autres officiers belges s'avançaient par la côte orientale vers le lac Tanganika, Stanley débarquait à Marseille et recevait du roi des Belges l'invitation de se rendre auprès de lui au château de Laeken.

En 1879, engagé au service de l'œuvre civilisatrice du Congo, dont Léopold II avait pris l'initiative, Stanley remonta le Congo au milieu des plus grandes difficultés. Il lui fallut quatre années entières pour organiser, le long de ce fleuve, les postes dont le premier « terminus » fut Léopoldville, sur le Stanley-Pool, et le second la station de Stanley-Falls, sur le Haut-Congo. Le résultat final fut la fondation de l'État Indépendant du Congo, dont les deux et uniques créateurs sont le roi Léopold et Stanley lui-même.

Enfin, la quatrième expédition africaine de Stanley est celle qu'il a entreprise pour rejoindre et ramener Emin Pacha et ses compagnons. Parti de Zanzibar, au début de l'année 1887, avec quelques centaines d'hommes, il contourne l'Afrique méridionale, pénètre dans le Congo, dont il remonte le cours jusqu'à Yambouya (juin). A partir de ce point, c'est toute une série de prodiges d'adresse qu'il a accomplis pendant deux années entières, perdu aux yeux de l'Europe inquiète sur son sort. Enfin, parvenu sur le lac Albert, il retrouve Emin et le ramène avec lui, découvrant en chemin le Semliki, le massif neigeux de Ruwenzori, le lac Edward, et traversant, au prix des plus durs sacrifices, d'immenses régions jusqu'à Bagamoyo, sur la côte orientale.

Quoi qu'on ait pu dire sur certaines questions de détail et de rivalités politiques, il reste vrai que Stanley a bien mérité de la civilisation.

Tous ces sacrifices d'hommes et d'argent auront des résultats précieux au point de vue chrétien et pour la destruction progressive de l'esclavagisme.

C'est depuis le troisième voyage de Stanley que les puissances européennes se précipitent et, pour ainsi dire, se bousculent pour occuper les territoires africains. De cette émulation et de ces rivalités — espérons qu'elles resteront pacifiques — sortiront la liberté et la vraie vie pour les populations africaines.

Nous souhaitons que les puissances européennes sachent toujours allier, dans leur action en Afrique, la fermeté à la prudence. Et s'il faut tirer l'épée, s'il faut donner la parole au fusil et au canon, que ce soit seulement contre les marchands de chair humaine !

IV

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 15 AVRIL 1890.

M. le Président lit la déclaration suivante, proposée par le Conseil de la Société à la ratification de l'assemblée générale :

« La Société scientifique de Bruxelles a été fondée en 1875 pour promouvoir l'étude des sciences qui cherchent à coordonner et à subordonner entre eux les phénomènes matériels et pour montrer l'harmonie de ces sciences avec les enseignements de la Philosophie chrétienne et de la Religion révélée. Elle a pris pour devise les paroles suivantes, empruntées à la Constitution *De Fide* du Concile du Vatican : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*

» Appelée en ce jour à renouveler son organisation à cause de la mort de son regretté Secrétaire général, la Société scientifique croit opportun d'exprimer à Sa Sainteté le Pape Léon XIII, par l'intermédiaire de Son Excellence le Nonce apostolique auprès de Sa Majesté le Roi des Belges, son adhésion entière et explicite, d'intelligence et de cœur, à la doctrine philosophique de saint Thomas d'Aquin telle qu'elle est recommandée dans plusieurs documents pontificaux et, en particulier, dans l'Encyclique *Æterni Patris.*

» La Société scientifique déclare, avec les savants dont il est parlé dans cette encyclique, que, « entre les conclusions certaines
» et reçues de la physique moderne et les principes philoso-
» phiques de l'École, il n'existe en réalité aucune contradiction
» (*inter certas ratasque recentioris Physicae conclusiones et phi-*
» *losophica Scholae principia nullam veri nominis pugnam exis-*
» *tere*). »

» Par cette adhésion et cette déclaration, la Société scientifique veut marquer d'une manière plus précise dans quel sens elle entend l'accord des sciences physiques et naturelles avec la philosophie chrétienne et témoigner, en même temps, une fois de plus, de son obéissance absolue aux enseignements du Saint-Siège. »

Cette déclaration ayant été admise par l'assemblée, a été transmise le lendemain à Son Excellence le Nonce apostolique, au nom de la Société scientifique, sous la signature du Président.

Ensuite M. l'abbé Renard, professeur à l'Université de Gand, fait une conférence *Sur la synthèse des minéraux et des roches.*

M. Renard expose la marche des progrès des sciences minérales : après avoir passé par une phase purement empirique, elles entrent, par l'analyse des faits et par l'induction qui généralise les observations, dans une voie vraiment scientifique. C'est vers la fin du siècle dernier qu'on commença à appliquer la méthode inductive à l'étude des roches. On y distingua bientôt deux groupes : les roches sédimentaires et les roches massives. C'est de ces dernières que le conférencier se propose de traiter spécialement. Elles s'observent en voie de formation dans les manifestations volcaniques. Tandis que nous voyons se former sous nos yeux les roches sédimentaires, la genèse des roches éruptives est entourée de mystères. Les voies de l'observation directe sont en partie fermées, l'analyse et le raisonnement ne peuvent suppléer aux données qui nous manquent, ils sont impuissants à nous apprendre toutes les causes en jeu dans la formation des roches éruptives. Pour résoudre les doutes, contrôler et compléter les observations, on tente alors de reproduire artificiellement les roches volcaniques. La science de la terre, d'analytique qu'elle était, entre alors dans une dernière phase, celle des expressions synthétiques. M. Renard rappelle les noms des savants qui ont les premiers essayé d'appliquer l'expérience aux phénomènes

géologiques et il insiste sur les découvertes qui se rattachent au sujet dont il traite; il montre ensuite comment l'analyse microscopique des roches massives parvient à éclairer leur composition et leur mode de formation. Malgré tout ce que ce mode de recherche nous avait montré, les questions relatives aux conditions de température et de pression auxquelles ces masses avaient été soumises avant leur consolidation, restaient entièrement inconnues. MM. Fouqué et Lévy abordent alors leurs essais de reproduction des roches éruptives. Pour les mener à bonne fin, ils s'appuient sur le fait que les cristaux les plus anciennement formés dans une roche éruptive doivent être les moins fusibles, et sur un résultat obtenu il y a près d'un siècle par James Hall : que la fusion d'une roche produit un verre plus facilement fusible que ne le sont chacune des espèces cristallisées constitutives de cette roche. A l'aide de fourneaux où les expérimentateurs peuvent obtenir tous les degrés de température entre le rouge sombre et le blanc éblouissant, ils fondent dans un creuset de platine le mélange de matières minérales que la fusion et les recuits successifs vont transformer en roche. Ce sont les recuits à des températures décroissantes qui forcent les cristaux à se former en série, à commencer par les moins fusibles, et qui permettent de donner aux matières fondues la texture et la composition minéralogique des produits volcaniques. M. Renard rappelle comment ces habiles expérimentateurs sont parvenus par leurs méthodes à faire la synthèse de toutes les roches éruptives contemporaines : les andésites, les labradorites, les basaltes, etc. Mais à côté de ces magnifiques résultats, on doit enregistrer quelques tentatives infructueuses. On peut dire que jusqu'ici toutes les roches acides se sont dérobées aux expériences synthétiques, comme toutes celles qui renferment des quartz, du mica, de l'orthose et de la hornblende. Ceci nous montre que les roches dont on n'a pas réalisé la synthèse ne se sont pas formées dans des conditions identiques à celles où se constituent les produits volcaniques actuels.

V

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 16 AVRIL 1890.

Folie et criminalité, tel est le titre de la conférence donnée par M. le Dr Francotte dans cette assemblée générale. S'il est aisé de définir, en principe, les conditions de la responsabilité légale, en pratique on se heurte souvent à de sérieuses difficultés.

Pour le médecin légiste, toute la question revient à décider si le prévenu est oui ou non sain d'esprit. Qu'il s'agisse de la folie de la persécution, de la mélancolie, de la folie paralytique, en un mot d'une maladie mentale bien nette, bien caractérisée, le doute n'est pas possible, l'irresponsabilité est évidente.

Mais les troubles psychiques ne sont pas toujours bien manifestes : il existe des *frontières de la folie,* où la santé mentale n'est plus complète, mais où la perturbation morbide n'est qu'à l'état rudimentaire; c'est notamment le cas chez les dégénérés et chez les déséquilibrés.

Cependant, une étude attentive des antécédents héréditaires, la constatation de stigmates anatomiques et de stigmates psychiques permettront d'affirmer l'état pathologique du sujet et de l'exonérer, tout au moins partiellement, de la responsabilité.

En l'absence des signes de la dégénérescence, le criminel doit être considéré comme responsable.

Une école nouvelle, créée par Lombroso, l'école d'anthropologie criminelle, cherche à supprimer toute barrière entre l'aliéné-criminel et le criminel-né.

Cette école assigne au criminel-né un ensemble de caractères anatomiques, physiologiques et psychologiques qui lui seraient propres et qui constitueraient le *type criminel.*

Ces caractères du type criminel résulteraient d'une rétrogradation ancestrale, c'est-à-dire qu'ils seraient le produit de l'atavisme.

Le conférencier montre combien les caractères du type cri-

minel sont vagues et incertains, et il établit que la ressemblance affirmée par Lombroso entre le criminel-né d'une part et, d'autre part, l'homme primitif, l'enfant et le sauvage est absolument chimérique.

Sans doute, il existe des êtres qui semblent voués au crime et qui sont inaccessibles à tout amendement. Ces individus sont les aliénés-criminels : leur état pathologique se révèle par les signes ordinaires de la dégénérescence, et, loin de former la règle comme le soutiennent les adeptes de l'anthropologie criminelle, ils constituent des exceptions, de véritables monstruosités.

La *Revue des questions scientifiques,* livraisons de juillet, pp. 152-202, et d'octobre 1890, pp. 401-429, a publié cette conférence sous le titre : *L'Anthropologie criminelle.*

Les deux commissaires nommés dans l'assemblée générale du lundi 14 avril ayant proposé d'approuver les comptes du Trésorier, leur proposition est adoptée.

Enfin, M. le Président proclame le résultat des élections pour l'année 1890-1891 (voir p. 41, la composition du Bureau et du Conseil), et déclare la session close.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Philosophie de François Bacon, par Ch. Adam. — Paris, 1890.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1891, formado bajo la direccion del ingeniero Angel Anguiano. Año XI. — México, 1890.

Diphtérie. Note sur les cas d'angine diphtéritique observés à l'École des pupilles de l'armée, à Alost, par M. Bourdeaux. — Bruxelles, 1889.

Compte rendu de la session extraordinaire de la Société géologique de Belgique tenue à Dinant les 1er, 2, 3 et 4 septembre 1888, par G. Dewalque. (Extrait des *Annales de la Société géologique de Belgique*. — Liège, 1890, t. XVI, *Bulletin*, 1888.)

Bibliothèque scientifique contemporaine. La vie au sein des mers, par L. Dollo. — Paris, 1891.

A revision of the South American Nematognathi or Cat-Fishes, by Carl H. Eigenmann and Rosa Smith Eigenmann. (*Occasional Papers of the California Academy of Sciences*, I.) — San Francisco, 1890.

Mme De Sainte-Beuve et les Ursulines de Paris (1562-1630), par Jean d'Estienne. (Extrait de la *Revue du monde catholique* du 1er août 1890.)

Revue des questions scientifiques, par Jean d'Estienne. (Extrait de la *Revue du monde catholique* du 1er septembre 1890.)

Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles, par F. Folie, directeur de l'Observatoire. 1891, 58e année. — Bruxelles, 1891.

Études sur l'anatomie pathologique de la moelle épinière (syringomyélie, sclérose combinée, myélite aiguë), par M. Xavier Francotte. (Extrait des *Archives de neurologie*, nos 56, 57, 58.) — Paris, 1890.

La vid, el vino y las bebidas alcohólicas en el pueblo de Israël, escrito por D. Guillermo J. de Guillen-Garcia. — Barcelona, 1890.

Harmonies de formes et de couleurs, démonstrations pratiques avec le rapporteur esthétique et le cercle chromatique, par M. Charles Henry. (Conférence faite à la *Bibliothèque Forney* le 27 mars 1890.) — Paris, 1891.

Sur l'averse d'étoiles filantes du 27 novembre 1885. Note de Dom Iehl.

De Badoej's, door Dr Jul. Jacobs en J.-J. Meijer. (Uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indie.) — 'S Gravenhage, 1891.

Variétés bibliographiques. L'imprimerie orientale de l'Université de Beyrouth, par H. L.

Études sur l'origine et la nature des taches de Jupiter, par Dom Lamey.

Étude expérimentale sur un mouvement curieux des ovoïdes et des ellipsoïdes, par Félix Leconte. (Extrait des *Archives des sciences physiques et naturelles*, t. XXIV, août 1890.) — Genève, 1890.

Quelques expériences d'acoustique, par Félix Leconte. (Extrait des *Archives des sciences physiques et naturelles*, mars 1891.)

Julien Lefèvre, avec la collaboration d'ingénieurs et d'électriciens. Dictionnaire d'électricité et de magnétisme, illustré, comprenant les applications aux sciences, aux arts et à l'industrie. Premier fascicule. — Paris, 1890.

L'Évolution restreinte aux espèces organiques, par le P. M. D. Leroy, des Frères-Prêcheurs. — Paris-Lyon, 1891.

Études sur la manipulation des matières textiles animales et végétales, par P. F. Levaux, directeur des fabriques impériales ottomanes. Tome I, industrie lainière, troisième édition. Tome II, industrie cotonnière, deuxième édition. — Louvain-Verviers, 1889-1890.

Land Birds of the Pacific District, by Lyman Belding. (*Occasional Papers of the California Academy of Sciences*, II.) San Francisco, 1890.

Le Cardinal Haynald, archevêque de Kalocsa, considéré comme botaniste, par Auguste Canitz. Traduit par Édouard Martens. — Gand, 1890.

Étude relative aux générateurs multitubulaires, par M. de Maupeau.

La Creación según que se contiene en el primer capítulo del Génesis, por el P. Juan Mir y Noguera, de la Compañía de Jesús. — Madrid, 1890.

Le Docteur Koch et sa découverte relative à la guérison de la tuberculose, par le Dr A. Mœller. Avec un portrait. — Bruxelles, 1890.

Origine de la navigation et de la pêche, par Gabriel de Mortillet. — Paris, 1867.

Sur l'origine des animaux domestiques, par G. de Mortillet. Communication à propos de la discussion sur l'origine des Aryas. (Extrait des *Bulletins de la Société d'anthropologie de Paris.*)

Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. IV, Art. I. Experiments in the Culture of the Sugar Beet in Nebraska. By H. H. Nicholson, A. M., and Rachel Lloyd, Ph. D. — Distribued April 15, 1891. — Lincoln, Nebraska, U. S. A.

Une application des coordonnées parallèles, par M. d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. VIII; décembre 1889.)

Deux théorèmes généraux sur les trajectoires de points et les enveloppes de droites dans le plan, par M. M. d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. IX ; juin 1890).

Quelques propriétés générales des courbes algébriques obtenues au moyen des coordonnées parallèles, par M. M. d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. IX; septembre 1890.)

Addition à une note sur une application des coordonnées parallèles (3e série, t. VIII, p. 568), par M. M. d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. IX; septembre 1890.)

Sur la transformation isogonale de W. Roberts, par M. M. d'Ocagne. (Extrait du *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas.*)

Sur les trajectoires des points marqués sur une droite qui se déplace en touchant constamment par l'un d'eux une courbe donnée, par M. M. d'Ocagne. — Paris, 1889.

Revue générale des sciences pures et appliquées. Directeur : Louis Olivier. Première année. — Paris.

La Belgique et l'heure de Greenwich, par Ernest Pasquier. (Extrait de la revue *Ciel et Terre.*)

Sur l'unification de l'heure. L'état actuel de la question, par Ernest Pasquier. (Extrait des *Mémoires de l'Union des Ingénieurs de Louvain*, 1891.) — Bruxelles-Louvain, 1891.

Delle opere pie, per Mons. Giuseppe Patroni. (Estratto dal periodico milanese *La Scuola cattolica*, gennaio 1891.) — Milano, 1891.

Epilogo dei ragionamenti tenuti nella Pontificia Accademia Tiberina l'anno 1890, letto nella tornata del di 12 Gennaio 1891, da Mons. Giuseppe Patroni, segretario annuale. — Roma, 1891.

Le dogme de la création et la science contemporaine, par le R. P. E. Pesnelle, des Prêtres de la Miséricorde. Seconde édition. — Paris, 1891.

Origine des forces de la nature. Nouvelle théorie remplaçant celle de l'attraction, par Guillaume Poche. — Paris.

Bibliothèque scientifique contemporaine. L'évolution des formes animales avant l'apparition de l'homme, par Fernand Priem. — Paris, 1891.

Le sommeil et le système nerveux. Physiologie de la veille et du sommeil, par S. Serguéyeff, 2 vol. — Paris, 1890.

Les classifications des Chéloniens, par l'abbé Gérard Smets. — Bruxelles, 1889.

Curso de Analyse infinitesimal, por F. Gomes Teixeira. Calculo differencial. 2ª edição. — Porto, 1890.

Les fondements de la métaphysique, par B. Conta. Traduit du roumain par D. Tescanu. — Paris, 1890.

Cours d'algèbre élémentaire, par l'abbé F. Verhelst. T. II. — Bruxelles, 1891.

Les races humaines, par le Dr R. Verneau. Introduction par A. de Quatrefages. Premier fascicule. — Paris.

Cahiers d'histoire naturelle, à l'usage des collèges et des pensionnats, par L. Wouters : éléments de botanique; anatomie et biologie du corps humain; éléments de zoologie, 2e édition. — Malines, 1888-1890.

Ministerio de Fomento. Observatorio meteorologico-magnetico central de México. Tablas psycrométricas calculadas para la altura de México. Tablas abreviadas generales compiladas por José Zendejas. — México, 1889.

Annales de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. Tome IV, 1re partie, observations et mémoires astronomiques; 2e partie, observations météorologiques de 1883 à 1885. — Rio de Janeiro, 1889.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVI, 2e livraison; tome XVII, 3e et 4e livraisons. — Liège, 1890.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Tome XXIV (4e série, tome IV). Année 1889. — Bruxelles.

Annuario publicado pelo imperial Observatorio de Rio de Janeiro para o anno de 1888. — Idem para o anno de 1889.

Annuario publicado pelo Observatorio astronomico de Rio de Janeiro para o anno de 1890.

Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXXV, 1888. Serie quarta. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume V. — Roma, 1888.

Boletin de minas, industria y construcciones, publicado por la Escuela especial de ingenieros. Año VI, núm. VII-XI. — Lima, 1890.

Bulletin of the California Academy of Sciences, nº 4, et vol. 2, nos 5, 6, 7. — San Francisco.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie (Bruxelles). 4e année, tome III, fascicule VIII. — Tome IV, fascicule I. — Bruxelles, 1890.

Bulletin of the Minnesota Academy of Natural Sciences. Vol. III, nº 1. — Proceedings and Accompanying Papers, 1883-86, with two plates. — Minneapolis, 1889.

Estados Unidos Mexicanos. Secretaria de Fomento. Seccion 4ª. Informes y documentos relativos á comercio interior y exterior, agricultura, é industrias. Numeros 57-68. — México, 1890-1891.

« Fauna », Verein Luxemburger Naturfreunde. Mittheilungen aus den Vereins-Sitzungen. Jahrgang 1891. Heft I. — Luxemburg.

Den Norske Nordhavs Expedition, 1876-1878. XX. Zoologi. Pycnogonidea, ved G. O. Sars. — Christiania, 1891.

Observaciones magnéticas y meteorológicas del real Colegio de Belen, de la Compañia de Jesús, en la Habana. 1er semestre, Enero-Junio 1888. — Habana, 1890.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Sessions 1887 - 1888, 1888-1889.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique. Tome XIX. — Bruxelles.

Reports from the Laboratory of the Royal College of Physicians, Edinburgh, Vol. III. — Edinburgh and London, 1891.

Revue de l'aéronautique théorique et appliquée, publication trimestrielle, 2e année; 3e année; 4e année, 1re et 2e livraisons. — Paris, 1889-1891.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXIII, part III; vol. XXXV, part I, II, III, IV.

FIN DE LA PREMIERE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

SUR

QUELQUES FORMULES D'UN USAGE GÉNÉRAL

DANS LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

Ph. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

On doit à Ostrogradsky une formule propre à transformer l'une dans l'autre deux intégrales, l'une s'étendant à tous les éléments d'un volume, l'autre à tous les éléments de la surface qui enveloppe ce volume. Par cela même, cette formule est d'un emploi commode dans un grand nombre de questions de physique et de mécanique.

Soient Ω le volume limité par une surface fermée Σ; $d\omega$, $d\sigma$ les éléments respectifs de ce volume et de cette surface; H une *fonction de point*, continue dans toute l'étendue du volume Ω; $\overline{nx}$ l'angle que fait avec l'axe des x la normale à $d\sigma$, prise vers l'intérieur de Ω. La formule dont nous parlons est celle-ci :

$$(1) \quad \ldots \quad \int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial x} d\omega = -\int_{\Sigma} H \cos \overline{nx}\, d\sigma.$$

Cette formule est utile, entre autres, pour établir le théorème de Green, les équations de l'hydrodynamique, de la chaleur, de l'élasticité, etc.

La formule correspondante en coordonnées curvilignes orthogonales est tout aussi facile à établir, et comme elle conduit à diverses conséquences qui ne sont pas sans intérêt, j'ai pensé faire chose utile, ne fût-ce qu'au point de vue didactique, en lui consacrant ces quelques pages (*).

1. Soient λ_1, λ_2, λ_3 les paramètres des trois systèmes de surfaces coordonnées ; ds_1, ds_2, ds_3 les éléments des lignes coordonnées orthogonales, respectivement normaux à ces surfaces. On a

$$ds_1 = h_1 d\lambda_1, \quad ds_2 = h_2 d\lambda_2, \quad ds_3 = h_3 d\lambda_3,$$

h_1, h_2, h_3 étant des fonctions de λ_1, λ_2, λ_3 que l'on déterminera aisément dans chaque système de coordonnées. Soient, en outre, M une fonction de λ_1, λ_2, λ_3 continue dans l'intérieur de Ω et ζ l'angle que fait la normale *intérieure* à l'élément $d\sigma$ avec la normale à la surface λ_1 au même point, *menée dans le sens où λ_1 va en croissant.*

L'intégrale triple

$$\int_{\Omega} M d\omega = \int_{\Omega} M ds_1 ds_2 ds_3 = \int_{\Omega} M h_1 h_2 h_3 d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$$

se transforme en groupant les éléments de l'intégrale qui se rapportent à un même filet compris entre les surfaces λ_2, $\lambda_2 + d\lambda_2$; λ_3, $\lambda_3 + d\lambda_3$. Nommons λ_1', λ_1'', λ_1''',... les valeurs du paramètre λ qui répondent aux points P', P'', P''',... où l'intersection des surfaces λ_2 et λ_3 perce successivement la surface Σ; $d\sigma'$, $d\sigma''$, $d\sigma'''$,... les éléments de la surface Σ compris dans ce filet, etc. En posant

$$M h_1 h_2 h_3 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1},$$

(*) M. Beltrami, dans un mémoire publié au tome VI, 4e série, de l'Institut de Bologne, et que je ne connais que par extrait, a établi une formule encore plus générale dont il a fait de savantes applications.

nous aurons pour la somme des éléments dont il s'agit

$$d\lambda_2 d\lambda_3 \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + d\lambda_2 d\lambda_3 \int_{\lambda'''}^{\lambda^{iv}} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \partial\lambda_1 + \cdots$$

$$= d\lambda_2 d\lambda_3 (-H' + H'' - H''' + H^{iv} - \cdots).$$

D'ailleurs, λ_2 et λ_3 étant constants le long de la courbe d'intersection, on a

$$d\lambda_2 d\lambda_3 = \frac{ds_2 ds_3}{h_2 h_3} = \frac{d\sigma' \cos\zeta'}{h'_2 h'_3} = -\frac{d\sigma'' \cos\zeta''}{h''_2 h''_3} = \frac{d\sigma''' \cos\zeta'''}{h'''_2 h'''_3} = \cdots$$

et l'expression précédente peut s'écrire

$$-\frac{H' \cos\zeta' d\sigma'}{h'_2 h'_3} - \frac{H'' \cos\zeta'' d\sigma''}{h''_2 h''_3} - \frac{H''' d\sigma''' \cos\zeta'''}{h'''_2 h'''_3} - \cdots = -S\frac{H \cos\zeta d\sigma}{h_2 h_3},$$

S indiquant une somme qui s'étend à tous les éléments $d\sigma$ compris dans un même filet. Opérant de même pour tous les filets dans lesquels on décompose le volume Ω, on a évidemment

$$\int_\Omega M d\omega = -\int_\Sigma \frac{H \cos\zeta d\sigma}{h_2 h_3},$$

ou enfin, en mettant pour M sa valeur en H et désignant par $\overline{n\lambda_1}$ l'angle ζ que fait la normale à la surface Σ, vers l'intérieur de l'espace Ω, avec la normale à la surface λ_1 menée dans le sens où λ_1 est croissant,

$$(2) \quad . \; . \; . \quad \int_\Omega \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} d\omega = -\int_\Sigma \frac{H \cos \overline{n\lambda_1} d\sigma}{h_2 h_3},$$

ce qui est la formule que l'on voulait établir.

On aurait évidemment de même

$$(2') \quad . \; . \quad \left\{ \begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} d\omega &= -\int_\Sigma \frac{H}{h_3 h_1} \cos \overline{n\lambda_2} d\sigma, \\ \int_\Omega \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} d\omega &= -\int_\Sigma \frac{H}{h_1 h_2} \cos \overline{n\lambda_3} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Faisons toutefois une remarque importante au sujet de ces formules (2) et (2'). D'après le signe attribué à cos ζ, la démonstration suppose que le paramètre λ_1 varie dans le même sens sur toute la longueur de la courbe d'intersection des surfaces λ_2, λ_3 depuis son entrée dans l'espace Ω jusqu'à sa sortie. Dans le cas contraire, dont on trouvera plus loin un exemple, il y aurait lieu de modifier l'équation (2) : il est d'ailleurs facile de ramener ce cas au premier, comme on le verra.

2. Nous appliquerons d'abord les équations (2) au problème des températures variables dans un milieu isotrope. Désignons par V la température. Égalant le flux de chaleur à travers la surface Σ qui limite une portion arbitraire Ω du volume du corps, pendant le temps *dt*, à la quantité de chaleur nécessaire pour produire l'élévation de température constatée en chaque point, on obtient immédiatement l'équation suivante :

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \int_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial t} d\omega = 0,$$

k^2 étant un coefficient constant dont la signification est bien connue. Mais on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dn} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dn} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_3}\frac{d\lambda_3}{dn} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\frac{ds_1}{dn} + \cdots$$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\cos \overline{n\lambda_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \lambda_2}\cos \overline{n\lambda_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial \lambda_3}\cos \overline{n\lambda_3}.$$

Substituant dans l'équation (α) et appliquant la formule (2) où l'on fera

$$\frac{H}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \lambda_1},$$

on aura d'abord

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\cos \overline{n\lambda_1}\, d\sigma = -\int_{\Omega} \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\right) d\omega,$$

et en opérant de même sur les deux autres termes par les formules (2'), on trouvera

$$\int_{\Omega}\left[\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}\right)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right]d\omega=0.$$

Cette équation devant subsister pour un volume Ω aussi petit qu'on le veut, on en conclut aisément, avec les restrictions ordinaires, que le coefficient de $d\omega$ doit être nul dans toute l'étendue du corps, d'où l'on a en chaque point

$$(3)\quad \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}\right)=\frac{h_1h_2h_3}{k^2}\frac{\partial V}{\partial t},$$

ce qui est l'équation de la chaleur en coordonnées curvilignes.

On tire immédiatement de cette équation une formule utile en diverses circonstances. Dans un système de coordonnées rectilignes orthogonales, on a

$$\lambda_1=x,\quad \lambda_2=y,\quad \lambda_3=z,\quad h_1=h_2=h_3=1,$$

et le premier membre devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\Delta_2 V.$$

Comme la quantité $\frac{1}{k^2}\frac{\partial V}{\partial t}$ est évidemment indépendante du système de coordonnées auquel on rapporte les points du milieu, on en conclut pour une fonction V quelconque la formule de tranformation

$$(4)\quad \Delta_2 V=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}\right)\right].$$

3. Il est facile de tirer des formules (2) la formule de Green par un système quelconque de coordonnées curvilignes. Soient U, V deux fonctions de λ_1, λ_2, λ_3, continues ainsi que leur déri-

vées partielles du premier ordre dans un espace Ω. Prenons l'intégrale

$$\int_\Sigma \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}d\sigma = \int_\Sigma \mathrm{U}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1}\cos\overline{n\lambda_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_2}\cos\overline{n\lambda_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_3}\cos\overline{n\lambda_3}\right)d\sigma.$$

Transformant par l'égalité (2), on a

$$\int_\Sigma \frac{\mathrm{U}}{h_1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1}\cos\overline{n\lambda_1}d\sigma = -\int_\Omega \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1}\right)d\omega$$

$$= -\int_\Omega \frac{\mathrm{U}}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1}\right)d\omega - \int_\Omega \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1}d\omega.$$

Opérant de même sur les deux autres termes, on trouvera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\mathrm{U}}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_3}\right)\right]d\omega \\ &= -\int_\Sigma \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}d\sigma - \int_\Omega \left(\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_2} + \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \lambda_3}\right)d\omega, \end{aligned}\right.$$

ce qui est la formule de Green en coordonnées curvilignes. Posant $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$, on retrouve la forme ordinaire.

4. Passons aux équations du mouvement des fluides. On peut d'abord les établir pour un système d'axes rectangulaires en s'appuyant sur la formule (1). En effet, soient p la pression, ρ la densité, X, Y, Z les composantes de la force accélératrice extérieure en un point quelconque (x, y, z) du fluide, j l'accélération du fluide en ce point. Si l'on applique à une portion quelconque Ω du volume du fluide l'équation du mouvement de translation parallèlement à l'axe des x,

$$\Sigma m j_x = \Sigma \mathrm{F}_x,$$

F désignant l'une des forces extérieures qui agissent sur le fluide, on trouve de suite la relation

$$\int_\Omega \rho \mathrm{X} d\omega + \int_\Sigma p_x d\sigma = \int_\Omega \rho j_x d\omega.$$

Mais la pression p est normale à $d\sigma$, vers l'intérieur, donc

$$p_x = p \cos \overline{nx},$$

et, en transformant par l'équation (1), on a

$$\int_\Sigma p_x d\sigma = -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x} d\omega;$$

donc, l'équation ci-dessus devient

$$\int_\Omega \left(\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho j_x\right) d\omega = 0,$$

d'où l'on déduit comme tantôt que l'on a, en un point quelconque de la masse fluide,

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - j_x, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - j_y, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - j_z, \end{aligned}\right.$$

les deux dernières équations étant obtenues par une voie semblable. Ce sont les équations connues que l'on transforme, comme on sait, en exprimant j_x, j_y, j_z au moyen des dérivées partielles des composantes de la vitesse.

Ces équations ayant lieu en chaque point de la masse, rien n'empêche de prendre en ce point pour directions des x, y, z celles des tangentes aux courbes d'intersection des surfaces coordonnées en ce même point, ce qui donnera, en désignant par P_1, P_2, P_3 les composantes, parallèles à ces tangentes, de la force accélératrice extérieure au même point, par j_1, j_2, j_3 les composantes de l'accélération,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s_1} = P_1 - j_1, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s_2} = P_2 - j_3, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s_3} = P_3 - j_3.$$

J'ai donné, dans un mémoire sur les accélérations d'ordre quelconque (*), les valeurs de j_1, j_2, j_3 en fonction des vitesses v_1, v_2, v_3 du fluide parallèlement aux lignes coordonnées :

$$j_1 = \frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{21}} - \frac{v_2}{R_{12}}\right) v_2 + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_3, \text{ etc. } (^{**}).$$

Mais v_1, v_2, v_3 sont des fonctions de t, λ_1, λ_2, λ_3 ; donc

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_3}\frac{d\lambda_3}{dt} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} + \frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_2} + \frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_3}, \end{aligned}$$

et ainsi des autres. Substituant, on trouvera enfin les trois premières équations aux dérivées partielles du mouvement des fluides en coordonnées curvilignes, sous la forme

$$(7) \quad . \quad . \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial \lambda_1} &= P_1 - \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} - \frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_2} - \frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_3} \\ &\quad + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) v_2 + \left(\frac{v_3}{R_{13}} - \frac{v_1}{R_{31}}\right) v_3, \\ \frac{1}{\rho h_2}\frac{\partial p}{\partial \lambda_2} &= P_2 - \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_2}{\partial \lambda_1} - \frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_2}{\partial \lambda_2} - \frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_2}{\partial \lambda_3} \\ &\quad + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) v_3 + \left(\frac{v_1}{R_{21}} - \frac{v_2}{R_{12}}\right) v_1, \\ \frac{1}{\rho h_3}\frac{\partial p}{\partial \lambda_3} &= P_3 - \frac{\partial v_3}{\partial t} - \frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_3}{\partial \lambda_1} - \frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_3}{\partial \lambda_2} - \frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_3}{\partial \lambda_3} \\ &\quad + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_1 + \left(\frac{v_2}{R_{32}} - \frac{v_3}{R_{23}}\right) v_2. \end{aligned} \right.$$

Cette forme est très commode dans les applications.

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, décembre 1888.

(**) R_{ik} est le rayon de courbure de la surface λ_i suivant la normale à la surface λ_k.

5. Reste l'équation de continuité. Celle-ci peut s'obtenir directement en coordonnées curvilignes.

On a évidemment, en égalant la masse du fluide entrée par une surface fermée Σ dans le temps dt à l'accroissement de masse du fluide compris dans l'espace Ω enveloppé par cette surface, v désignant la vitesse du fluide,

$$(\beta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \int_{\Sigma} \rho v \cos \overline{vn} d\sigma = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega.$$

Or,

$$v \cos \overline{vn} = v_1 \cos \overline{n\lambda_1} + v_2 \cos \overline{n\lambda_2} + v_3 \cos \overline{n\lambda_3};$$

et comme, en vertu de l'équation (2), on aura

$$\int_{\Sigma} \rho v_1 \cos \overline{n\lambda_1} d\sigma = - \int_{\Omega} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\rho h_2 h_3 v_1) . d\omega, \text{ etc.},$$

l'équation (β) deviendra

$$\int_{\Omega} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\rho h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\rho h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial \lambda_3} (\rho h_1 h_2 v_3) \right] d\omega = - \int_{\Omega} \frac{d\rho}{dt} d\omega,$$

d'où l'on déduira, en réunissant tous les termes sous le même signe $\int$ et observant que le volume Ω est arbitraire,

$$(8) \qquad \frac{\partial . \rho h_2 h_3 v_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial . \rho h_3 h_1 v_2}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial . \rho h_1 h_2 v_3}{\partial \lambda_3} + h_1 h_2 h_3 \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

C'est l'équation de continuité des fluides en coordonnées curvilignes. Si l'on fait $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$, on retrouve l'équation ordinaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial . \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial . \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial . \rho v_z}{\partial z} = 0.$$

Si l'on applique l'équation (8) aux coordonnées sphériques, on a

$$\lambda_1 = r, \quad \lambda_2 = \theta, \quad \lambda_3 = \psi,$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta,$$

$$R_{12} = R_{13} = r, \quad K_{21} = \infty, \quad R_{23} = r \operatorname{tg} \theta, \quad R_{31} = R_{32} = \infty;$$

donc, en désignant par v_r, v_θ, v_ψ, P_r, P_θ, P_ψ les composantes de la vitesse et de la force normalement aux surfaces r, θ, ψ, on aura par une simple substitution les équations du mouvement des fluides en coordonnées sphériques :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = P_r - \frac{\partial v_r}{\partial t} - v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{v_\theta^2 + v_\psi^2}{r},\\
&\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = P_\theta - \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\psi^2}{r\,\mathrm{tg}\,\theta},\\
&\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \psi} = P_\psi - \frac{\partial v_\psi}{\partial t} - v_r\frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\psi}{\partial \theta} - \frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} - \frac{v_\psi}{r}\left(v_r + \frac{v_\theta}{\mathrm{tg}\,\theta}\right),\\
&\sin\theta\frac{\partial.\rho r^2 v_r}{\partial r} + r\frac{\partial.\rho v_\theta\sin\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial.\rho v_\psi}{\partial \psi} + r^2\sin\theta\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.
\end{aligned}\right.$$

6. L'équation de continuité (8) peut se mettre sous une forme différente. Divisant par $h_1\, h_2\, h_3$, observant que $ds_1 = h_1\, d\lambda_1,\ldots,$ on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial.\rho h_2 h_3 v_1}{ds_1} + \cdots = 0,$$

ou, développant et observant que

$$\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial.\rho h_2 h_3 v_1}{ds_1} = \frac{\partial.\rho v_1}{\partial s_1} + \frac{\rho v_1}{h_2 h_3}\frac{\partial.h_2 h_3}{\partial s_1} = \rho\frac{\partial v_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \rho}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dt} + \cdots,$$

on trouvera d'abord

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial s_1} + \frac{\partial v_2}{\partial s_2} + \frac{\partial v_3}{\partial s_3}\right) + \rho v_1\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial s_1} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial s_1}\right) + \cdots = 0.$$

Mais nous savons, par les formules de Lamé, que l'on a en général

$$\frac{1}{R_{ik}} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial s_i};$$

donc, l'équation précédente pourra s'écrire sous cette nouvelle forme

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_1}{\partial s_1} + \frac{\partial v_2}{\partial s_2} + \frac{\partial v_3}{\partial s_3} + v_1\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{21}}\right)\\
&+ v_3\left(\frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{32}}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Lorsque le fluide est homogène, elle devient simplement

$$\frac{\partial v_1}{\partial s_1}+\frac{\partial v_2}{\partial s_2}+\frac{\partial v_3}{\partial s_3}+v_1\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{13}}\right)+v_2\left(\frac{1}{R_{23}}+\frac{1}{R_{21}}\right)+v_3\left(\frac{1}{R_{31}}+\frac{1}{R_{32}}\right)=0.$$

Ainsi, en coordonnées cylindriques, où l'on a

$$\lambda_1=r,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=z,\quad ds_1=dr,\quad ds_2=rd\theta,$$
$$ds_3=dz,\quad R_{12}=r,\quad R_{13}=R_{21}=R_{23}=R_{31}=R_{32}=\infty,$$

on aura

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0, \text{ etc.}$$

7. Une méthode semblable conduit rapidement aux équations de l'équilibre intérieur et du mouvement des milieux élastiques, en coordonnées curvilignes orthogonales.

Soient X la composante, parallèle à un axe fixe quelconque OX, de la force intérieure qui sollicite l'unité de masse en un point quelconque du milieu, p_n la pression sur l'unité de surface normale à une direction donnée n, et p_{nx} la composante de cette pression parallèle à OX. La condition d'équilibre d'un volume quelconque Ω pris dans la masse donnera l'équation

$$\int_\Omega \rho X d\omega+\int_\Sigma p_{nx}d\sigma=0.$$

Appelons α_1, α_2, α_3 les cosinus des angles que font avec OX, en un point, les normales aux surfaces orthogonales λ_1, λ_2, λ_3; P_1, P_2, P_3 les composantes de la force extérieure en ce point parallèlement à ces normales. Nous avons d'abord

$$X=P_1\alpha_1+P_2\alpha_2+P_3\alpha_3.$$

D'autre part, on sait que

$$p_{nx}=p_{xn}=p_{x1}\cos\overline{n\lambda_1}+p_{x2}\cos\overline{n\lambda_2}+p_{x3}\cos\overline{n\lambda_3}.$$

Mais

$$p_{x1}=p_{1x}=p_{11}\alpha_1+p_{12}\alpha_2+p_{13}\alpha_3.$$

et de même pour p_{x_2}, p_{x_3}; donc, notre équation deviendra

$$
(A)\left\{
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \rho\,(P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + P_3\alpha_3)\,d\omega \\
&+ \int_{\Sigma} \Big[(p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + p_{13}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_1} + (p_{21}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + p_{23}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_2} \\
&+ (p_{31}\alpha_1 + p_{32}\alpha_2 + p_{33}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_3}\Big]\,d\sigma = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La direction $\bar{n}$ qui figure dans ces formules est celle de la normale intérieure à la surface Σ, car je considère la pression p_n comme positive lorsqu'elle est dirigée vers l'intérieur.

On a donc, d'après la formule (2),

$$
\int_{\Sigma} (p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + p_{13}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_1}\,d\sigma
= -\int_{\Omega} \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[h_2h_3(p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + p_{13}\alpha_3)\right] d\omega.
$$

Observons que, d'après les formules de la courbure des surfaces et vu le sens dans lequel nous plaçons les rayons de courbure positifs (*), nous avons

$$
\frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\lambda_1} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_1} = -\left(\frac{\alpha_2}{R_{21}} + \frac{\alpha_3}{R_{31}}\right),
$$

$$
\frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\lambda_1} = \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_1} = \frac{\alpha_1}{R_{21}}, \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha_3}{\partial\lambda_1} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial s_1} = \frac{\alpha_1}{R_{31}},
$$

et alors, si l'on développe les dérivées partielles et que l'on substitue, on trouvera

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma} (p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + p_{13}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_1}\,d\sigma = \\
&-\int_{\Omega} \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial . h_2h_3p_{11}}{\partial\lambda_1}\alpha_1 + \frac{\partial . h_2h_3p_{12}}{\partial\lambda_1}\alpha_2 + \frac{\partial . h_2h_3p_{13}}{\partial\lambda_1}\alpha_3\right] d\omega \\
&-\int_{\Omega} \left[\left(\frac{p_{12}}{R_{21}} + \frac{p_{13}}{R_{31}}\right)\alpha_1 - \frac{p_{11}}{R_{21}}\alpha_2 - \frac{p_{11}}{R_{31}}\alpha_3\right] d\omega.
\end{aligned}
$$

(*) Opposé à celui dans lequel les paramètres λ_1, λ_2, λ_3 vont en croissant.

On transformera de même les deux autres intégrales

$$\int_{\Sigma}(p_{21}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+p_{23}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_2}\,d\sigma,\quad \int_{\Sigma}(p_{31}\alpha_1+p_{32}\alpha_2+p_{33}\alpha_3)\cos\overline{n\lambda_3}\,d\sigma,$$

en intégrales étendues au volume Ω, ce qui permettra, dans l'équation (A), de réunir toutes les intégrales sous un même signe d'intégration et de conclure, comme précédemment, que le volume Ω étant arbitraire, le coefficient de $d\omega$ sous le signe $\int$ doit se réduire à zéro en chaque point du milieu élastique. Mais ce coefficient est linéaire et homogène par rapport à α_1, α_2, α_3, et comme la direction OX est arbitraire, il faut que les coefficients de α_1, α_2, α_3 soient nuls séparément. On a donc ainsi les trois équations

$$(11)\ldots\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial.h_2h_3p_{11}}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial.h_3h_1p_{21}}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial.h_1h_2p_{31}}{\partial\lambda_3}\right]\\
&\qquad+\frac{p_{12}}{R_{21}}+\frac{p_{13}}{R_{31}}-\frac{p_{22}}{R_{12}}-\frac{p_{33}}{R_{13}}=\rho P_1,\\
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial.h_2h_3p_{12}}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial.h_3h_1p_{22}}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial.h_1h_2p_{32}}{\partial\lambda_3}\right]\\
&\qquad+\frac{p_{23}}{R_{32}}+\frac{p_{21}}{R_{12}}-\frac{p_{33}}{R_{23}}-\frac{p_{11}}{R_{21}}=\rho P_2,\\
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial.h_2h_3p_{13}}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial.h_3h_1p_{23}}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial.h_1h_2p_{33}}{\partial\lambda_3}\right]\\
&\qquad+\frac{p_{31}}{R_{13}}+\frac{p_{32}}{R_{23}}-\frac{p_{11}}{R_{31}}-\frac{p_{22}}{R_{32}}=\rho P_3.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations de l'équilibre intérieur en coordonnées curvilignes, obtenues par une méthode bien plus simple et sous une forme plus commode que ne l'a fait Lamé dans sa théorie des coordonnées curvilignes.

8. On sait que les équations du mouvement des corps élastiques se tirent des précédentes en remplaçant P_1, P_2, P_3 respectivement par P_1-j_1, P_2-j_2, P_3-j_3, et j_1, j_2, j_3 s'ex-

priment au moyen des dérivées partielles de v_1, v_2, v_3 par les formules déjà rappelées. On aura de cette manière, pour les équations du mouvement des corps élastiques en coordonnées curvilignes,

$$(12).\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial.h_2h_3p_{11}}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial.h_3h_1p_{12}}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial.h_1h_2p_{13}}{\partial\lambda_3}\right]+\frac{p_{12}}{R_{21}}+\frac{p_{13}}{R_{31}}-\frac{p_{22}}{R_{12}}-\frac{p_{33}}{R_{13}}\\
&\quad=\rho\left[P_1-\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda_1}-\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda_2}-\frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda_3}+\left(\frac{v_2}{R_{12}}-\frac{v_1}{R_{21}}\right)v_2+\left(\frac{v_3}{R_{13}}-\frac{v_1}{R_{31}}\right.\right.\\
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial.h_2h_3p_{21}}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial.h_3h_1p_{22}}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial.h_1h_2p_{23}}{\partial\lambda_3}\right]+\frac{p_{23}}{R_{32}}+\frac{p_{21}}{R_{12}}-\frac{p_{33}}{R_{23}}-\frac{p_{11}}{R_{21}}\\
&\quad=\rho\left[P_2-\frac{\partial v_2}{\partial t}-\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_2}{\partial\lambda_1}-\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_2}{\partial\lambda_2}-\frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_2}{\partial\lambda_3}+\left(\frac{v_3}{R_{23}}-\frac{v_2}{R_{32}}\right)v_3+\left(\frac{v_1}{R_{21}}-\frac{v_2}{R_{12}}\right.\right.\\
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial.h_2h_3p_{31}}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial.h_3h_1p_{32}}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial.h_1h_2p_{33}}{\partial\lambda_3}\right]+\frac{p_{31}}{R_{13}}+\frac{p_{32}}{R_{23}}-\frac{p_{11}}{R_{31}}-\frac{p_{22}}{R_{32}}\\
&\quad=\rho\left[P_3-\frac{\partial v_3}{\partial t}-\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_3}{\partial\lambda_1}-\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_3}{\partial\lambda_2}-\frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_3}{\partial\lambda_3}+\left(\frac{v_1}{R_{31}}-\frac{v_3}{R_{13}}\right)v_1+\left(\frac{v_2}{R_{32}}-\frac{v_3}{R_{23}}\right.\right.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations se transforment encore en développant les dérivations partielles indiquées et appliquant les équations de Lamé. Ainsi l'on a

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial.h_2h_3p_{11}}{\partial\lambda_1}=\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial.h_2h_3p_{11}}{\partial s_1}=\frac{\partial p_{11}}{\partial s_1}+p_{11}\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{13}}\right),$$

et ainsi de suite. La première des équations (12) prend ainsi la forme suivante :

$$(13).\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1}\frac{\partial p_{11}}{\partial\lambda_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial p_{12}}{\partial\lambda_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial p_{13}}{\partial\lambda_3}+p_{11}\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{13}}\right)-\frac{p_{22}}{R_{12}}-\frac{p_{33}}{R_{13}}\\
&+p_{12}\left(\frac{2}{R_{21}}+\frac{1}{R_{23}}\right)+p_{13}\left(\frac{2}{R_{31}}+\frac{1}{R_{32}}\right)=\rho\left[P_1-\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda_1}\right.\\
&\left.-\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda_2}-\frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda_3}+\left(\frac{v_2}{R_{12}}-\frac{v_1}{R_{21}}\right)v_2+\left(\frac{v_3}{R_{13}}-\frac{v_1}{R_{31}}\right)v_3,\right.
\end{aligned}\right.$$

et les deux autres subissent des transformations analogues. Dans le cas des coordonnées rectilignes, on trouve

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \rho\left(X - \frac{\partial v_x}{\partial t} - v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right), \text{ etc.}$$

Dans le cas du mouvement des fluides, les pressions obliques p_{12}, p_{13},... disparaissent, et l'on retombe sur les équations de l'hydrodynamique que nous avons données plus haut.

9. Les formules (2) s'appliquant à tout système orthogonal, en les particularisant on obtient un grand nombre de formules intéressantes et utiles. Remarquons d'abord que si, dans l'équation (2), nous prenons pour H une constante, $\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = 0$, et nous avons la relation suivante :

$$(14)\ldots\ldots\quad \int_{\Sigma} \frac{\cos \overline{n\lambda_1}}{h_2 h_3}\, d\sigma = 0,$$

généralisation de la formule de Gauss

$$\int_{\Sigma} \cos \overline{nx}\, d\sigma = 0.$$

Si l'on prend

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = h_1 h_2 h_3, \quad \text{ou} \quad H = \int h_1 h_2 h_3 d\lambda,$$

on aura cette expression du volume d'un corps

$$(15)\ldots\ldots\quad \int_{\Sigma} \frac{H \cos \overline{n\lambda_1}}{h_2 h_3}\, d\sigma = -\Omega.$$

Prenons les coordonnées sphériques r, θ, ψ, et supposons que le pôle soit *en dehors* de l'espace enveloppé par Σ. Comme nous avons ici

$$\lambda_1 = r, \quad \lambda_2 = \theta, \quad \lambda_3 = \psi, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\theta,$$

les formules (2) et (2′) deviendront

$$\int_\Omega \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial H}{\partial r}\,d\omega = -\int_\Sigma \frac{H}{r^2\sin\theta}\cos\overline{nr}\,d\sigma,$$

$$\int_\Omega \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial H}{\partial \theta}\,d\omega = -\int_\Sigma \frac{H}{r\sin\theta}\cos\overline{n\theta}\,d\sigma,$$

$$\int_\Omega \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial H}{\partial \psi}\,d\omega = -\int_\Sigma \frac{H}{r}\cos\overline{n\psi}\,d\sigma.$$

Considérons en particulier la première et posons

$$\frac{\partial H}{\partial r} = f(r)\,F(\theta,\psi)\,r^2\sin\theta,$$

f et F désignant des fonctions données. On aura évidemment, en désignant par $\varphi(r)$ l'intégrale

$$-\int r^2 f(r)\,dr,$$

$$H = \sin\theta F(\theta,\psi)\int r^2 f(r)\,dr = -\sin\theta F(\theta,\psi)\,\varphi(r),$$

et, en substituant dans la première équation ci-dessus, on trouvera

$$(16)\quad . \; . \int_\Omega f(r)\,F(\theta,\psi)\,d\omega = \int_\Sigma \frac{\varphi(r)\,F(\theta,\psi)\cos\overline{nr}}{r^2}\,d\sigma.$$

Réduisons successivement F (θ, ψ) à l'unité et à cos q, q désignant l'angle que fait le rayon vecteur r avec une direction déterminée (soit constante, soit même variable avec r); nous aurons les égalités

$$(17)\quad . \; . \left\{ \begin{aligned} &\int_\Omega f(r)\,d\omega = \int_\Sigma \frac{\varphi(r)\cos\overline{nr}\,d\sigma}{r^2}, \\ &\int f(r)\cos q\,d\omega = \int_\Sigma \frac{\varphi(r)\cos q\cos\overline{nr}\,d\sigma}{r^2}. \end{aligned}\right.$$

On reconnaît là deux formules dont Gauss s'est servi dans sa théorie des phénomènes capillaires, pour réduire les intégrales sextuples à des intégrales quadruples.

Dans la première des équations (17), on peut prendre successivement

$$\varphi(r) = 1, \quad \varphi(r) = -\frac{r^3}{3},$$

d'où l'on déduira $f(r) = 0$, $f(r) = -1$, et l'on aura ces deux égalités, applicables à toute surface fermée,

$$\int_\Sigma \frac{\cos \overline{nr}\, d\sigma}{r^2} = 0,$$

$$-\frac{1}{3}\int_\Sigma r \cos \overline{nr}\, d\sigma = \Omega,$$

dont la dernière donne une expression utile du volume compris sous la surface Σ.

10. Mais il y a lieu d'appliquer aux formules (16) et (17) une observation faite plus haut.

Ces formules supposent essentiellement que l'origine des rayons vecteurs ne soit pas comprise dans l'espace Ω, car autrement le rayon vecteur r ne varierait pas dans le même sens dans toute l'étendue de cet espace.

Pour ramener ce second cas au premier, supposons que l'on décrive autour de l'origine O une surface sphérique Σ' de rayon infiniment petit γ, et qu'on applique la formule (16) au volume Ω compris entre Σ et Σ', ce qui sera permis puisque les conditions de la démonstration seront ici remplies. Sur la surface Σ', on a

$$r = \gamma, \quad \cos \overline{nr} = 1, \quad d\sigma = \gamma^2 d\varepsilon,$$

$d\varepsilon$ désignant l'élément de la surface sphérique E de centre O et de rayon égal à l'unité. Donc, au lieu de la formule (16), nous trouverons

$$\int_\Omega f(r)\, F(\theta, \psi)\, d\omega = \int_\Sigma \frac{\varphi(r)\, F(\theta, \psi) \cos \overline{nr}\, d\sigma}{r^2} + \int_\Sigma \varphi(\gamma)\, F(\theta, \psi)\, d\varepsilon,$$

et en faisant tendre γ vers zéro,

$$\int_{\Omega} f(r) \, F(\theta, \psi) \, d\omega = \varphi(0) \int_{E} F(\theta, \psi) \, d\varepsilon + \int_{\Sigma} \frac{\varphi(r) \, F(\theta, \psi) \cos \overline{nr} \, d\sigma}{r^2}.$$

La première des formules (17) deviendrait

$$\int_{\Omega} f(r) \, d\omega = 4\pi\varphi(0) + \int_{\Sigma} \frac{\varphi(r) \cos \overline{nr} \, d\sigma}{r^2},$$

et la seconde

$$\int_{\Omega} f(r) \cos q d\omega = \varphi(0) \int_{E} \cos q d\varepsilon + \int_{\Sigma} \frac{\varphi(r) \cos q \cos \overline{nr} \, d\sigma}{r^2}.$$

La modification des formules, pour le cas où le point O est sur la surface Σ, se fait de même sans difficulté.

11. On trouverait d'autres formules intéressantes et utiles dans certains problèmes, en adoptant les formules générales aux coordonnées cylindriques ou elliptiques, et l'on arriverait sans doute facilement, dans ce dernier cas, d'une manière très simple, aux curieuses intégrales définies signalées par Lamé. Mais ces questions nous écarteraient de notre but.

LES
DERNIÈRES RECHERCHES BRYOZOOLOGIQUES
DU D^r ED. PERGENS.

PAR

G. SCHMITZ, S. J.

M. le D^r Ed. Pergens, ancien élève de l'Université de Louvain, s'est adonné depuis quelques années à l'étude des bryozoaires.

La géologie attend des résultats importants de cette branche de la paléontologie.

La remarquable fixité des espèces qu'on a constatée chez ces animaux permettra de déterminer plus sûrement et plus aisément l'identité des âges de certains dépôts géologiques. En particulier, la question si obscure et si controversée du synchronisme des gisements crétacés pourra peut-être trouver une solution dans l'étude comparée de ces animalcules.

L'auteur des deux travaux sur lesquels nous allons donner un court aperçu n'en est pas à sa première œuvre (1).

---

(1) Voici la liste des travaux de notre auteur :

1885. MEUNIER et PERGENS, *Nouveaux bryozoaires du crétacé supérieur*, 1 pl. (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE MALACOLOGIQUE DE BELGIQUE, t. XX.)

1886. MEUNIER et PERGENS, *Les bryozoaires du système montien*, 3 pl., Louvain.

PERGENS et MEUNIER, *La faune des bryozoaires garumniens de France*, 5 pl. (ANN DE LA SOC. MALACOL., t. XXI.)

1887. PERGENS, *Pliocäne Bryozoën von Rhodes*, 1 pl. (ANNALEN DER K. K. NATURHIST. HOFSMUSEUMS, Wien.)

PERGENS, *Les bryozoaires du Tašmajdan à Belgrade.* (ANN. DE LA SOC. MALACOL., t. XXII.)

PERGENS, *Note préliminaire sur les bryozoaires fossiles des environs de Kolosvar.* (IBID.)

PERGENS, *Contributions à l'histoire des bryozoaires et des hydrozoaires récents* (IBID.)

Le dernier travail de M. le D[r] Pergens présente, malgré son peu d'étendue, un intérêt considérable. Il nous fait connaître quels résultats l'auteur a déjà obtenus dans ses études anatomiques de bryozoologie. Tout ce qu'il nous en dit est si neuf, si intéressant et si important que nous sommes forcé de le suivre pas à pas.

Il rectifie plusieurs opinions sur la constitution et la fonction des organes des bryozoaires, opinions accréditées jusqu'ici à cause de l'autorité dont jouissaient leurs auteurs. M. Pergens ne s'est pas borné à une observation quelconque des individus, il a su tirer profit des procédés les plus perfectionnés que la micrographie met au service des naturalistes. Nous grouperons sous quelques titres les détails qui nous semblent offrir le plus d'intérêt.

Cavités intersquelettiques. — Il y a dans l'ectoderme certaines ouvertures qu'on avait prises pour des pores. Cette opinion est erronée ; car ces cavités, recouvertes de la cuticule, contiennent des cellules qui alimentent par leurs sécrétions la couche calcareuse. La grandeur de l'ouverture varie à mesure que l'individu avance en âge. Dans certaines limites, ces cellules calcarogènes se présentent chez tous les bryozoaires à dépôts calcaires que l'auteur a pu examiner. Le calcaire, une fois déposé, peut être résorbé dans la formation des ovicelles, dans le bourgeonnement des *Cellaria*, etc.

Orifice semi-lunaire. — Ainsi s'appelle un pore véritable que certaines espèces possèdent dans la paroi operculaire. C'est par là que l'eau pénètre dans la zoécie. Des piquants en forme de

---

1887. Pergens, *Sur l'âge de la partie supérieure du tufeau de Ciply.* (Bulletin de la Soc. belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie, t. I.)

1888. Pergens, *Remarques sur la réunion du calcaire de Mons et du tufeau de Ciply dans un même groupe stratigraphique.* (Ibid., t. II.)

1889. Pergens, *Deux nouveaux types de bryozoaires cténostomes.* (Ann. de la Soc. malacol., t. XXIV.)

Pergens, *Notes succinctes sur les bryozoaires : I. Sur des bryozoaires du miocène de la Russie méridionale; II. Bryozoaires dragués par M. Dollfus dans le nord-ouest de la Méditerranée; III. Bryozoaires des environs de Brest.* (Ibid.)

Pergens, *Zur fossilen Bryozoënfauna von Wola Lu'zanska.* (Bulletin de la Soc. belge de géologie, etc., t. III.)

Pergens, *Untersuchungen an Seebryozoën.* (Zoologischer Anzeiger, n[os] 317 et 318, Vienne.)

bois de cerf en garnissent l'entrée et arrêtent à l'extérieur les corps étrangers. L'animal peut fermer cet orifice à l'intérieur, au moyen d'un sac inséré aux deux côtés de l'opercule et gouverné par des muscles situés à sa partie proximale.

Ce dernier organe est déjà indépendant de la gaine tentaculaire dans le bourgeon.

Gaine tentaculaire. — Cette gaine entoure l'opercule et s'attache au pharynx. Elle est perforée en quatre endroits par l'ouverture operculaire, le diaphragme Nitsche, la bouche et l'anus. Les muscles pariéto-vaginaux la relient aux parois de la zoécie.

Le *diaphragme* est un enfoncement de la gaine susdite percée en son milieu. Ses mouvements sont commandés par des muscles circulaires et par des muscles longitudinaux. On n'avait pu jusqu'ici en étudier le fonctionnement. M. le Dr Pergens, comprenant les difficultés qu'on rencontrerait nécessairement dans les espèces calcareuses, observa surtout le genre *Flustra*. Les dilatations et contractions successives des muscles du diaphragme font penser à l'action d'une pompe qui introduirait de l'eau de la gaine tentaculaire dans la cavité zoéciale. Cette eau porte les tentacules contre l'opercule; de plus, la contraction des muscles de la gaine augmente également la pression interne qui ouvre l'opercule. S'agit-il de le ramener en place, les muscles rétracteurs agissent seuls et chassent l'eau par les ouvertures diaphragmatique et operculaire, tandis que le sac ferme l'orifice semi-lunaire.

Ces constatations ne permettent plus de croire à l'action des muscles pariétaux, ni de la chambre à eau de compensation.

Muscles. — L'auteur distingue les muscles pariétaux, les pariéto-vaginaux, les pariéto-organiques, les sphincters, les longitudinaux, les grands rétracteurs, enfin les muscles spéciaux à l'opercule et aux ovicelles.

Appareil nutritif.— L'appareil nutritif de l'adulte se compose de la couronne tentaculaire, du pharynx, de l'œsophage, de l'estomac et du gros intestin.

Le ganglion nerveux qui préside aux fonctions de nutrition se trouve au côté neural du pharynx.

La *couronne tentaculaire* présente un nombre constant de tentacules dans les individus d'une même espèce. Plutôt prismatiques du côté proximal, ils sont cylindriques du côté distal. Huit rangées de cellules les composent; les deux latérales et les deux internes sont les seules qui soient pourvues de cils destinés à guider par un jeu vertical l'entrée des aliments dans la bouche.

Les tentacules sont creux. Fermés à l'extrémité supérieure, ils communiquent en bas avec un canal circulaire formé par la continuation des rangées de cellules des tentacules. Un tissu parenchymateux, se prolongeant jusque dans l'appareil nutritif, tapisse canal et tentacules.

La *bouche* est un orifice circulaire, recouvert d'un épithélium assez développé mais dépourvu de cils.

Le *pharynx* est constitué intérieurement par la réunion des deux rangées internes de cellules dont nous parlions plus haut; les autres cellules se réunissent aussi pour composer la paroi externe.

Une couche d'épithélium et une couche parenchymateuse forment le revêtement interne du pharynx et de tout le système digestif.

L'*œsophage*, qui relie le pharynx à l'estomac, est un canal étroit et seulement pourvu de cils à deux places.

Les bryozoaires ont-ils un *foie?* Il est difficile de l'affirmer. Notre savant auteur n'a pu constater qu'une tache jaunâtre, à l'endroit où d'autres ont voulu voir un véritable organe, sécrétant de la bile.

Un *cæcum* garni de cils à sa partie supérieure s'ouvre dans l'appareil digestif. Jamais l'auteur n'y a trouvé d'aliments, mais bien de grandes cellules, qui probablement proviennent du cæcum lui-même.

L'épithélium de l'*intestin* est aussi pourvu de cils jusqu'au rectum, et c'est à leur action vibratile qu'il faut attribuer la forme cylindrique des déjections des bryozoaires.

Fonctions sexuelles. — M. le Dr Pergens les décrit telles qu'il les a pu constater dans la *Microporella Malusii*, Aud.

La multiplication des cellules des couches pariétales produit un ovaire jaune-pâle dans le creux de la zoécie. Ce n'est pas par

segmentation que cette multiplication s'opère; les cellules semblent provenir directement du parenchyme. Elles s'absorbent peu à peu les unes les autres, et l'une d'entre elles devient l'œuf. Les cellules qui viennent se grouper tout autour servent à le nourrir. Un moment vient où cet œuf se détache de la paroi et s'entoure de nouvelles cellules qui, dorénavant, seront son enveloppe. De forme ovoïde et allongée, de couleur jaunâtre, il laisse apercevoir un noyau rond renfermant des corpuscules arrondis. Malgré son développement déjà considérable, ce n'est qu'après être resté quelque temps encore dans la zoécie qu'il peut pénétrer enfin dans l'ovicelle, en subissant dans son passage une compression violente.

La partie de l'ancien ovaire qui subsiste encore augmente de volume, et, tandis qu'il se forme un nouvel appareil nutritif, l'ancien se change en un corps brunâtre.

L'auteur fait remarquer qu'il n'est pas le seul à signaler ce rapport entre l'histolysis et la formation de l'œuf.

Développement de la larve. — M. le Dr Pergens nous montre l'œuf couché horizontalement dans l'ovicelle et se divisant selon le mode de segmentation déjà admis par la plupart des auteurs. Il se sépare en deux dans le sens du petit axe, puis en quatre dans le sens du grand axe. Il passe successivement par les stades de 8, 16, par un intermédiaire 24, puis par 32 et 64.

L'œuf, au stade de 32, subit dans toutes ses parties une pression violente qui le déforme et aplatit ses extrémités.

Au stade de 64, quatre cellules sont entrées dans l'intérieur du blastocèle et se développent très rapidement.

Le côté oral de l'embryon présente deux organes : la ventouse et la fente ectodermale. A cette dernière aboutit l'organe pyriforme de Barrois. La cavité interne dont parle ce dernier auteur se voit facilement et paraît servir à l'élimination des sécrétions de l'organe pyriforme.

Du côté aboral, les cellules sont radiaires; d'après M. le Dr Pergens, elles sont ectodermiques et donnent naissance à l'organe rétractile.

L'embryon sort enfin de la zoécie et glisse librement sur l'eau en décrivant de gracieux circuits. Son côté oral tout entier porte

des cils ; un plumet, qui peut s'invaginer, se voit à la face aborale.

Marquée de dix taches de pigment rouge partagées en cinq groupes, la couronne laisse voir des flagellums qui prennent naissance en dessous du côté oral. L'organe rétractile, entouré de cils roides, parait être mû par de longues cellules parenchymateuses. Un corps jaunâtre, représentant l'appareil digestif, et une masse parenchymateuse remplissent l'intérieur de l'embryon.

Notre jeune animal ne jouit pas longtemps de sa liberté.

Vingt minutes s'écoulent, et c'est fini. Il lui arrive toutefois d'attendre douze heures avant de redevenir prisonnier.

Il se fixe alors en dévaginant sa ventouse et en rejetant une matière granuleuse.

Le nouveau stade où il entre offre un aspect différent de celui des zoécies ordinaires.

L'animal se forme peu à peu par l'absorption de la matière jaunâtre qu'il trouve dans son corps. Trente-six heures après, l'appareil nutritif apparaît sous une forme rudimentaire. Vingt-quatre heures s'écoulent; on aperçoit la couronne tentaculaire, qui prend quatre jours pour se développer; l'appareil nutritif a pris alors la position verticale et les autres organes ont déjà apparu. L'opercule, toutefois, ne se montre complet que le septième jour, et le rectum n'est perforé que le huitième.

La première zoécie n'a pas la forme ordinaire des *Microporella*, mais rappelle tout à fait le genre *Membranipora*. La sécrétion du calcaire de l'ectoderme commence au quatrième jour, sans recouvrir jamais l'area caractéristique des *Membranipora*, dont le rebord est déjà muni de pointes plus ou moins régulières. On peut voir aussi dans la paroi proximale les ouvertures des cavités intersquelettiques.

Bientôt, aux six côtés de la zoécie primitive, se forment les bourgeons des futures zoécies de la colonie. L'appareil nutritif de la zoécie primitive s'atrophie alors sans plus se reformer; c'est du moins ce que l'auteur a constaté jusqu'ici dans ses observations. Les zoécies secondaires n'ont plus la forme *Membranipora*, mais la forme tout ordinaire.

SUR
L'HERPOLHODIE DE POINSOT
ET SUR
UN APPAREIL DE MM. DARBOUX ET KŒNIGS

PAR

M. Ph. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

---

1. L'histoire de l'*herpolhodie* présente une particularité curieuse. Poinsot a montré qu'elle est décrite par le point de contact C′ de l'ellipsoïde d'inertie (E) du corps, tournant autour de son centre fixe O, avec un plan tangent fixe (P). Il a montré que cette courbe est comprise entre deux cercles ayant pour centre commun la projection O′ du point O sur le plan (P), en sorte qu'elle s'approche et s'éloigne alternativement de ces deux cercles. Poinsot semble avoir conclu de là qu'elle a une forme ondulée, touchant successivement les deux cercles en leur présentant sa convexité, et possède par suite une infinité de points d'inflexion. On aurait pu concevoir aussi qu'elle tourne toujours sa concavité vers le point O′, avec des points de rebroussement sur la circonférence intérieure, comme la courbe tracée par la pointe d'une toupie.

Mais l'herpolhodie n'a ni rebroussements, ni inflexions : elle présente toujours sa convexité au cercle extérieur et sa concavité au cercle intérieur en les touchant alternativement. Cette remarque importante a été publiée dans ces *Annales*, il y a quelques années (*), par M. le comte de Sparre; elle a immédiatement attiré l'attention et M. W. Hess, de Munich, a rappelé qu'il avait signalé ce résultat dès 1880 dans sa dissertation *Ueber*

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. IX.

das Rollen einer Fläche, etc. M de Sparre avait basé la démonstration de son théorème sur les fonctions elliptiques; depuis, MM. Darboux, Resal, etc., ont confirmé ces résultats par des méthodes plus élémentaires, en montrant que le rayon de courbure de l'herpolhodie ne devient jamais infini ni nul.

Il m'a paru qu'il serait plus satisfaisant encore de prouver directement que la courbe tourne toujours sa concavité vers le pôle O′, et c'est l'objet du calcul suivant.

2. Soient A, B, C les moments principaux d'inertie du corps; ϖ la distance constante OO′; ρ et θ les coordonnées polaires, O′ étant le pôle, du point de contact C′ de l'ellipsoïde (E) avec le plan (P), et posons

$$a = \frac{1}{A\varpi^2}, \quad b = \frac{1}{B\varpi^2}, \quad c = \frac{1}{C\varpi^2}, \quad \rho = \varpi\zeta.$$

En exprimant les composantes p, q, r de la rotation instantanée en fonction de la vitesse angulaire ω, par les intégrales des aires et des forces vives, et désignant par m la composante *constante* de la rotation suivant la droite OO′, on obtient une équation bien connue qui peut s'écrire comme il suit :

$$\text{(A)} \quad \zeta \frac{d\zeta}{dt} = \pm m \sqrt{-\left[\zeta^2+(1-b)(1-c)\right]\left[\zeta^2+(1-c)(1-a)\right]\left[\zeta^2+(1-a)(1-b)\right]}.$$

En projetant sur le plan (P) l'aire décrite par l'axe instantané dans l'intérieur du corps, pendant l'instant dt, on obtient une seconde équation qui peut s'écrire

$$\text{(B)} \quad \ldots \quad \zeta^2 \frac{d\theta}{dt} = m\left[\zeta^2 + (1-a)(1-b)(1-c)\right].$$

Ces deux équations qui déterminent le mouvement du point C′ sur le plan (P) ne diffèrent que par les notations de celles que M. Darboux a données dans son mémoire (*). L'équation aux carrés des demi-axes de l'ellipsoïde est censée connue, et par suite celle qui a pour racines a, b, c. Posons donc

$$\text{(1)} \quad . \quad f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Px^2 + Qx - R;$$

(*) Note XVII de la *Mécanique* de Despeyrous.

f sera une fonction connue, ainsi que

$$P = a + b + c, \qquad Q = bc + ca + ab, \qquad R = abc,$$

et l'on aura

$$f(1) = (1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

Posons encore

$$\begin{aligned} F(\zeta^2) &= [\zeta^2 + (1-b)(1-c)][\zeta^2 + (1-c)(1-a)][\zeta^2 + (1-a)(1-b)] \\ &= \left[\zeta^2 + \frac{f(1)}{1-a}\right]\left[\zeta^2 + \frac{f(1)}{1-b}\right]\left[\zeta^2 + \frac{f(1)}{1-c}\right] \\ &= \frac{\zeta^6}{f(1)}\left[1 - a + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right]\left[1 - b + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right]\left[1 - c + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right], \end{aligned}$$

d'où enfin

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(\zeta^2) = \frac{\zeta^6}{f(1)} f\left[1 + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right].$$

Les équations (A) et (B) prennent la forme très simple :

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\zeta \frac{d\zeta}{dt} = \pm m \sqrt{-F(\zeta^2)}, \\ &\zeta^2 \frac{d\theta}{dt} = m[\zeta^2 + f(1)]. \end{aligned} \right.$$

Nous les simplifions encore en posant

$$w = 1 + \frac{f(1)}{\zeta^2}, \quad \text{d'où} \quad \zeta^2 = \frac{w-1}{f(1)}, \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{1}{2}\frac{dw}{w-1},$$

d'où, par l'équation (2),

$$F(\zeta^2) = \zeta^6 \frac{f(w)}{f(1)},$$

et la première équation (3) élevée au carré devient

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{dw^2}{dt^2} = -\frac{4m^2(w-1)^2 f(w)}{f(1)}.$$

Mettant pour ζ^2 sa valeur en w dans cette équation et dans la

seconde équation (3), on aura, pour déterminer le mouvement du point C′,

$$(4) \quad \ldots \quad \begin{cases} \rho = \varpi\zeta, \quad \dfrac{1}{\zeta^2} = \dfrac{w-1}{f(1)}, \quad \dfrac{d\theta}{dt} = mw, \\ \dfrac{dw^2}{dt^2} = -4m^2(w-1)f(w). \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que l'on a toujours $(w-1)f(1) > 0$, $(w-1)f(w) < 0$, et par suite

$$f(1)f(w) < 0.$$

En supposant $A > B > C$, on aura $a < b < c$, et de plus, $a < 1$, $c > 1$, $b \gtrless 1$. D'un autre côté, le rayon ρ étant toujours compris entre le rayon du cercle extérieur et celui du cercle intérieur, on déduit facilement de là que, si $b > 1$, ζ varie entre

$$\sqrt{(1-a)(1-c)}, \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-a)(b-1)},$$

et comme on a

$$w = 1 + \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{\zeta^2},$$

w sera toujours compris entre les limites b et c. De même, si $b < 1$, w variera entre a et b, et comme a, b, c sont positifs, on est sûr que w ne sera jamais nul.

3. Appelons maintenant μ l'angle que fait le rayon vecteur ρ de l'herpolhodie, prolongé, avec la tangente menée dans le sens où θ est croissant. On sait que μ est donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \zeta\frac{d\theta}{d\zeta} = -2(w-1)\frac{d\theta}{dw} = -2mw(w-1) : \frac{dw}{dt}.$$

On tire de là, par les équations (4),

$$\frac{1}{\cos^2\mu} = 1 + \operatorname{tg}^2\mu = 1 - \frac{w^2(w-1)}{f(w)}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d.\operatorname{tg}\mu}{dt} = -2m\frac{d}{dt}\frac{w(w-1)}{\left(\frac{dw}{dt}\right)} = -2m\left[2w-1-\frac{w(w-1)}{\frac{dw^2}{dt^2}}\frac{d^2w}{dt^2}\right].$$

Mais la différentiation de la dernière équation (4) donne

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -2m^2\left[f(w) + (w-1)f'(w)\right],$$

d'où

$$\frac{d^2w}{dt^2}:\frac{dw^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{f(w)+(w-1)f'(w)}{(w-1)f(w)},$$

et l'on a ainsi

$$\frac{d.\operatorname{tg}\mu}{dt} = \frac{1}{\cos^2\mu}\frac{d\mu}{dt} = -m\left[3w-2-\frac{w(w-1)f'(w)}{f(w)}\right].$$

Remarquons maintenant que si l'on suppose le rayon vecteur ρ immobile dans sa position actuelle et que l'on désigne par φ l'angle variable de la tangente, prise dans le sens où θ croît, avec ce rayon rendu fixe, on a

$$d\varphi = d\mu + d\theta,$$

et que $d\varphi$ sera positif ou négatif suivant que la courbe tournera sa concavité ou sa convexité vers le pôle O'.

Nous voyons donc que *l'herpolhodie tourne sa concavité ou sa convexité vers le pôle O' selon que l'expression*

$$V = \frac{d.\operatorname{tg}\mu}{dt} + \frac{1}{\cos^2\mu}\frac{d\theta}{dt}$$

est positive ou négative. Or, en ayant égard aux valeurs données ci-dessus, on aura après réductions

$$V = \frac{m(w-1)}{f(w)}\left[-2f(w) + wf'(w) - w^5\right],$$

ou, comme

$$f(w) = w^3 - Pw^2 + Qw - R, \qquad f'(w) = 3w^2 - 2Pw + Q,$$

l'expression entre crochets se réduira à $-Qw+2R$, d'où

$$V=\frac{m(w-1)}{f(w)}(2R-Qw).$$

Mais on a vu plus haut que $(w-1):f(w)$ est toujours négatif dans les limites où w varie. On a d'ailleurs

$$\frac{Q}{R}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

et comme, *dans un ellipsoïde d'inertie*, on a toujours

$$B+C>A, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a},$$

on aura

$$\frac{Q}{R}>\frac{2}{a}, \quad 2R<Qa, \quad 2R-Qw<Q(a-w),$$

d'où, w étant toujours plus grand que a,

$$2R-Qw<0.$$

Ainsi V est toujours positif. De plus, $d\varphi$ étant infiniment petit, l'angle φ varie d'une manière continue. On en conclut que l'angle φ croît constamment et d'une manière continue, d'où il suit que l'herpolhodie tourne toujours sa concavité vers le pôle O′ et ne peut avoir aucun point de rebroussement.

Mais la démonstration prouve que cette propriété est subordonnée à la condition

$$B+C>A,$$

c'est-à-dire qu'elle peut n'avoir pas lieu pour d'autres ellipsoïdes que l'ellipsoïde d'inertie, et *a fortiori* pour d'autres surfaces du second ordre, pour lesquelles a et b peuvent être négatifs.

4. Le mouvement d'un corps solide fixé par un point et non soumis à des forces motrices, ou *mouvement de Poinsot*, comporte une représentation *géométrique* et une représentation *cinématique*. La première est réalisée complètement par le

roulement de l'ellipsoïde d'inertie sur un de ses plans tangents, qui est fixe. La seconde suppose en outre que la vitesse angulaire de rotation soit proportionnelle au rayon de l'ellipsoïde (E) autour duquel elle a lieu, ce qui est plus difficile à obtenir mécaniquement. M. Sylvester a donné, dans les *Philosophical Transactions* (1866), un moyen de tourner la difficulté, mais M. Darboux en a signalé un autre qui se prête mieux à une exécution pratique.

D'après les travaux de Poinsot, le mouvement géométrique peut aussi être réalisé en faisant rouler sans glisser un certain cône (Q), qui est le lieu dans le corps d'un rayon OC parallèle à O'C', et qui est supposé lié au corps, sur un plan (P') parallèle à (P), mené par le point fixe O et tournant avec la vitesse angulaire constante *m* autour de l'axe fixe OO'. Ce cône, du second degré et homofocal à l'ellipsoïde d'inertie, étant supposé construit, imaginons qu'il soit invariablement lié à l'ellipsoïde d'inertie, et assujetti à rouler sans glissement sur le plan (P') pendant que l'ellipsoïde d'inertie (E) est assujetti à rouler sans glissement sur le plan fixe (P). Nous avons ainsi un système *à liaisons complètes*, de façon que si un mécanisme d'horlogerie imprime un mouvement de rotation uniforme au plan (P') autour de OO', le système composé du cône (Q) et de l'ellipsoïde (E), assujetti, d'une part, à rouler sur le plan mobile (P'), d'autre part, à rouler sur le plan mobile (P), aura un mouvement entièrement défini qui ne pourra être différent d'un mouvement de Poinsot.

Tel est le principe de l'appareil conçu par MM. Darboux et Kœnigs, construit par MM. Château père et fils, qui a figuré à l'Exposition universelle de 1889. Les dessins ci-joints en donnent une idée complète.

La figure 1 est un schéma d'ensemble. (P) est le plan fixe, γ représente le point fixe O autour duquel le corps pivote, $\eta\varepsilon$ est l'ellipsoïde d'inertie. Le plan (P') a été réduit à l'engrenage circulaire A, auquel un mouvement d'horlogerie imprime une rotation uniforme autour de l'axe vertical γF. De même, le cône (Q) a été réduit à un engrenage B ayant pour primitive l'intersection

de ce cône (Q) avec une sphère de centre γ et de même rayon que l'engrenage A ; $\gamma\delta$ est l'axe de ce cône (Q).

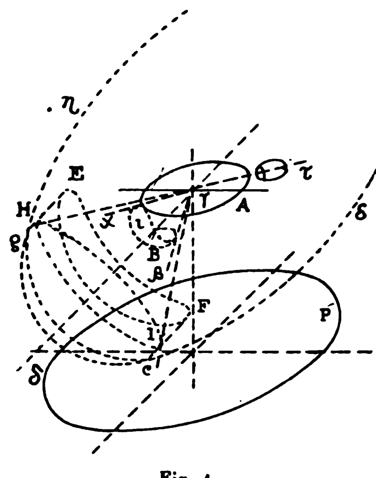


Fig. 1.

L'ellipsoïde d'inertie $\varepsilon\eta$ n'est pas construit : il est réduit, dans l'appareil, à la *polhodie* gC', qui est le lieu du point de contact C' sur l'ellipsoïde. Cette courbe est formée par les extrémités pointues de cent vingt baguettes d'acier, implantées normalement sur un plateau elliptique HI fixé sur l'axe $\gamma\delta$. Ce plateau étant solidaire de l'engrenage B, le mouvement que celui-ci reçoit de A se transmet à la polhodie gC', qui vient rouler sur le plateau fixe P, sur lequel les picots d'acier tracent par points l'herpolhodie. Un contre-poids τ sert à équilibrer le poids de l'équipage mobile, condition essentielle pour le bon fonctionnement du système, et des ailettes qui se voient à la partie supérieure dans la figure 2 sont destinées à maintenir l'uniformité de la rotation de l'engrenage A.

On vérifie facilement par les traces laissées par les picots sur une feuille de papier préparé, la propriété de l'herpolhodie de n'avoir ni rebroussements ni inflexions. La figure 2 représente deux coupes verticales de l'appareil, l'une de face, l'autre en bout. La figure 3 donne une perspective complète de l'instrument, abstraction faite du système moteur.

Dans la figure 4 est représenté un autre instrument, dû aux mêmes inventeurs, et qui a avec le premier une certaine liaison. Dans ses recherches sur le mouvement de Poinsot, M. Darboux est arrivé à établir ce théorème : *Lorsque trois points d'une droite sont assujettis à rester sur trois sphères qui ont leurs centres respectifs sur une même droite, un quatrième point de la droite*

mobile décrira aussi une surface sphérique ayant son centre sur la droite fixe. En choisissant convenablement ce quatrième point,

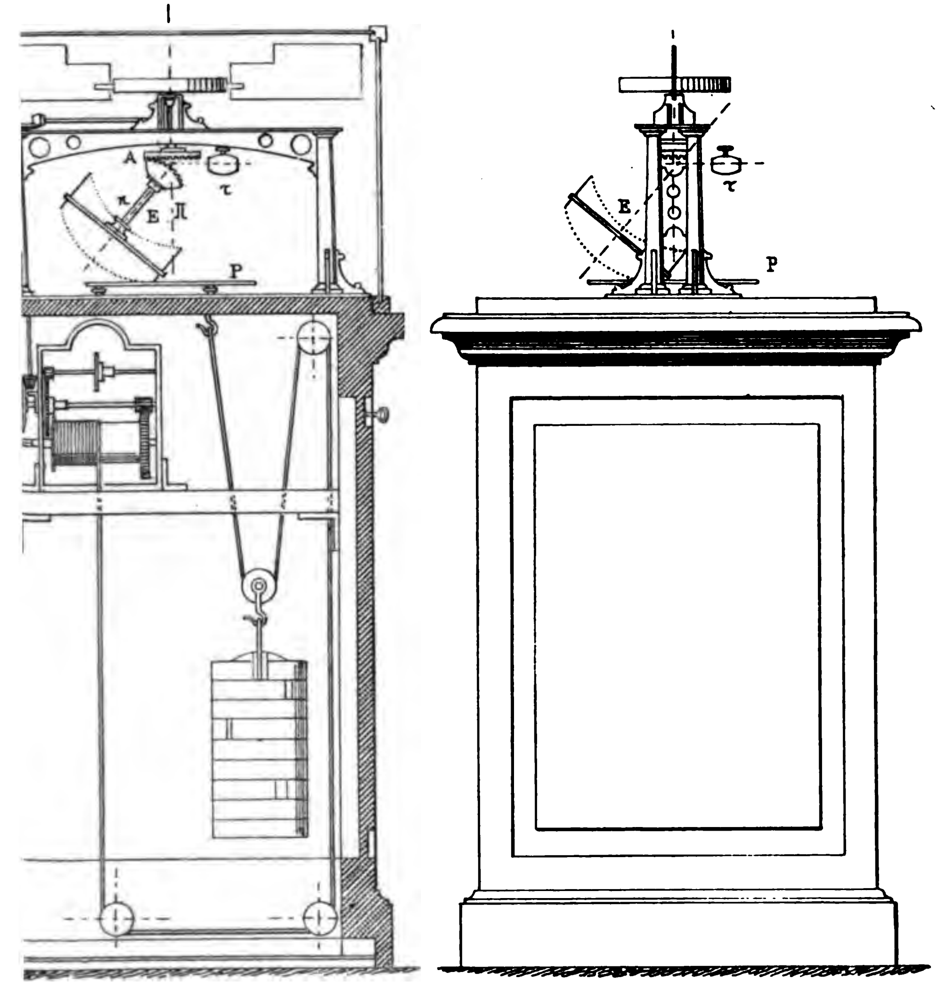


Fig. 2.

on peut porter à l'infini le centre de la quatrième sphère, et assujettir ainsi le point mobile à décrire un plan normal à la droite fixe. C'est cette idée qu'a réalisée M. Château dans le *Planigraphe* de MM. Darboux et Kœnigs, également exposé à

Paris en 1889. Certaines difficultés de construction ont été habilement surmontées.

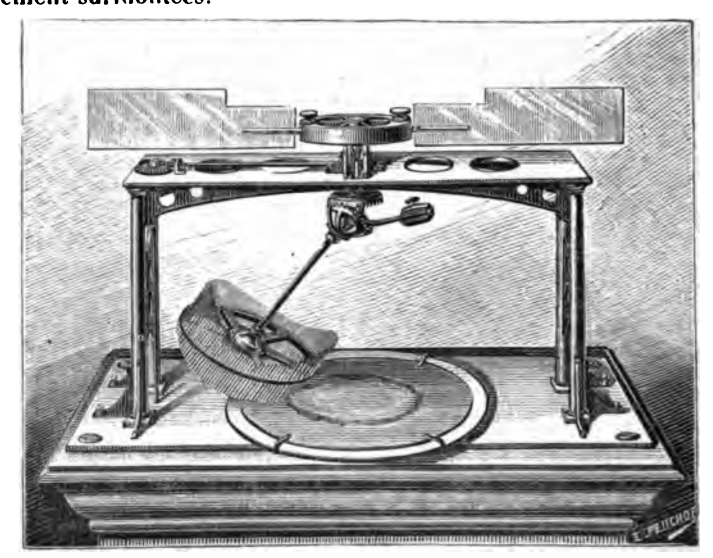


Fig. 3.

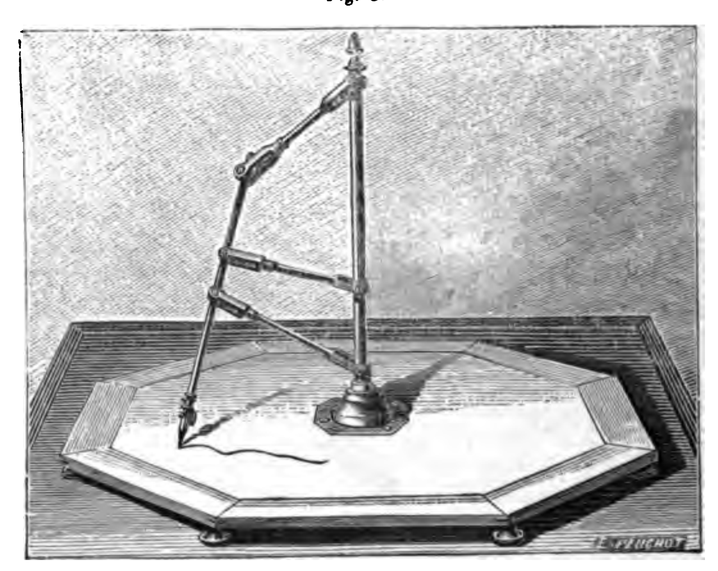


Fig 4.

N. B. Les clichés ci-dessus ont été obligeamment prêtés par **MM. Château.**

SUR

LES POSTULATS ET LES AXIOMES D'EUCLIDE

PAR

P. MANSION

Professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique.

---

1. ***Énumération des postulats et des axiomes.*** Après les définitions du livre I des *Éléments* d'Euclide, on trouve, dans la plupart des manuscrits et des éditions de ce livre célèbre, quinze propositions rangées sous deux titres distincts : *Postulats* et *Notions communes* ou *axiomes*. Voici ces propositions, dont nous empruntons la traduction à M. P. Tannery (*).

Postulats. 1. Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite (I, 1).

2. Et de prolonger, en ligne droite et en continuité, une droite limitée (I, 2).

3. Et de décrire un cercle de tout centre et de tout rayon (I, 1).

4 (Axiome 10, dans Grégory). Et que tous les angles droits soient égaux entre eux (I, 14).

5 (Axiome 11, dans Grégory). Et que, si une droite rencontrant deux droites fait du même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté dont la somme est inférieure à deux droits (I, 29).

6 (Axiome 12, dans Grégory; axiome 9, dans Heiberg). Et que deux droites ne comprennent pas d'espace (I, 4).

(*) *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide* (Bulletin de Darboux, 2e série, 1884, t. VIII, 1re partie, pp. 162-175), pp. 163-164. Nous indiquons, d'après M. P. Tannery, la première proposition des Éléments où Euclide fait usage de chaque postulat ou axiome.

NOTIONS COMMUNES OU AXIOMES. 1. Les choses égales à une même sont aussi égales entre elles (I, 1).

2. Et si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, les sommes sont égales (I, 13).

3. Et si, de choses égales, on retranche des choses égales, les restes sont égaux (I, 3).

4. Et si, à des choses inégales, on ajoute des choses égales, les sommes sont inégales (I, 17).

5 (Supprimé dans Heiberg). Et si, de choses inégales, on retranche des choses égales, les restes sont inégaux (III, 17).

6 (5 dans Heiberg). Et les doubles d'une même chose sont égaux entre eux (I, 42).

7 (6 dans Heiberg). Et les moitiés d'une même chose sont égales entre elles (I, 37).

8 (7 dans Heiberg). Et les choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles (I, 4).

9 (8 dans Heiberg). Et le tout est plus grand que la partie (I, 6).

2. *Les postulats et axiomes dans les manuscrits et les éditions savantes.* M. Heiberg, dans son édition, a tenu compte principalement de quatre manuscrits qu'il désigne par les lettres P, B, F et V : les trois derniers représentent la recension de Théon (vers 370 après J.-C.), et le premier, une recension antérieure. De plus, il a consulté, pour le premier livre spécialement, deux autres manuscrits qu'il dénote par les lettres *b* et *p* et qui appartiennent aussi au groupe théonien. Dans ce groupe, d'ailleurs, d'après M. Heiberg, F est de beaucoup le meilleur (*).

Les manuscrits P, F et des retouches faites au manuscrit V donnent le postulat 6 à la place indiquée au n° 1 ; les manuscrits V, *b, p* le placent au contraire après les axiomes ou notions communes; B le place aussi après les axiomes, mais avec le verbe à l'infinitif, comme si toute la phrase dépendait de : *il est demandé.* Le manuscrit B ne contient pas non plus l'axiome 5,

(*) T. V, p. XXXVII. M. Heiberg dit : F *Theoninorum longe optimus est.*

qu'on ne trouve qu'en marge dans F et *b;* dans *p,* il est ajouté après coup.

Quant aux principales éditions, voici comment elles disposent les quinze propositions :

1° L'édition de Campanus, qui a été faite d'après un Euclide arabe, et celle de Peyrard (1814-1818), qui suit surtout l'excellent manuscrit P du Vatican, ont les postulats et les axiomes dans l'ordre indiqué plus haut.

2° L'édition princeps de Bâle (1533), faite sur de mauvais manuscrits, et celle d'Oxford (1703), de D. Grégory, qui s'appuie sur celle de Bâle, reportent les trois postulats 4, 5, 6 après les axiomes (*).

3° L'édition latine de Commandin (1572) rejette le postulat 6 après les axiomes. D'après ce que nous apprend M. Heiberg, Commandin s'est servi, pour faire sa traduction, non seulement de l'édition de 1533, mais aussi d'un manuscrit grec.

4° M. Heiberg, dans sa belle édition des *Éléments* (1883-1888), met le postulat 6 à la même place que Commandin, parmi les axiomes, mais il le regarde comme interpolé, ainsi que les axiomes 4, 6, 7; quant à l'axiome 5, il l'exclut même du texte grec, bien qu'il dise en note qu'on le trouve ordinairement dans les manuscrits et les éditions; de plus, pour lui, 8 et 9 sont douteux.

3. *Opinion de MM. P. Tannery et Heiberg sur les postulats et les axiomes.* M. P. Tannery s'est occupé deux fois au moins des axiomes et des postulats d'Euclide. Dans un premier article intitulé : *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (BULLETIN DE DARBOUX, 2e série, t. V, 1re partie, pp. 124-136), Proclus, dit-il, « ne reconnaissait comme postulats que les trois relatifs à la construction de la droite et du cercle, dont le caractère particulier semble garantir l'adoption comme tels par Euclide et leur inscription par lui en tête des propositions. Il est bien

(*) C'est pourquoi souvent les postulats 4, 5, 6 sont désignés comme axiomes 10, 11, 12. Il en est de même dans l'édition de Dasypodius (1564).

douteux, au contraire, que l'auteur des *Éléments* se soit jamais proposé de réunir en tête de son livre les divers lemmes qu'il a admis comme accordés dans le cours de ses propositions. S'il avait fait ce travail, il eût certes évité d'en accroître autant le nombre, et surtout de prendre comme axiomes des théorèmes dont la démonstration est facile. » Suivant M. Tannery, on pouvait démontrer les axiomes 1 à 7 au moyen de 8 et 9. « Quant aux prétendus axiomes 10 (de l'édition de Grégory, c'est-à-dire le postulat 4), l'égalité de tous les angles droits 12 (même édition, postulat 6), que deux droites ne peuvent limiter un espace, le premier est certainement un théorème oublié par Euclide ; le second, lemme admis dans I, 4, pouvait être considéré par lui comme rentrant dans le premier postulat. »

Dans le second article, déjà cité plus haut à propos de la traduction des quinze postulats ou axiomes, la question est traitée plus longuement.

« Les trois premiers postulats, dit M. Tannery, ont un caractère tout particulier; ce ne peut être certainement qu'un profond penseur qui conçut le premier l'idée originale de réduire les constructions élémentaires au minimum de trois et de les *formuler en postulats* » (p. 164).

« Mais ces postulats mis à part, l'impression que donne le reste est que l'on a ultérieurement recherché dans le premier livre des *Éléments* tout ce qui y était admis sans démonstration et que les propositions formulées à la suite de cette recherche ont été classées tant bien que mal. Déjà Geminus, un siècle avant J.-C., voulait séparer les postulats 4 et 5, qu'il considérait comme des théorèmes à démontrer. Il avait incontestablement raison en ce qui concerne le postulat 4; mais il semble que, si Euclide avait le premier formulé cette proposition, il ne se serait pas mépris sur son caractère, pas plus qu'il n'aurait été arrêté par la difficulté d'une démonstration.... Quant au fameux énoncé relatif aux parallèles, il est au contraire certain qu'Euclide a dû essayer de le démontrer et renoncer à ses inutiles recherches; il le postule nettement, quoique sous une forme beaucoup plus brève, au cours de la proposition XXIX » (pp. 164-165).

« Si l'on veut ne conserver comme véritablement euclidiens que les axiomes réellement dignes de l'auteur des *Éléments*, on est conduit à ne lui attribuer, *au premier abord*, que les trois premiers postulats et peut-être aussi les trois premières notions communes, mais pour ces dernières le doute est très sérieux » (p. 167).

Mais peut-être peut-on aussi supposer qu'Euclide a trouvé, dans les Éléments antérieurs, les définitions, les trois premiers postulats; il a ajouté 4 pour ne pas remanier les définitions de l'angle aigu et de l'angle obtus, 5 parce qu'il le fallait bien; quant aux notions communes, elles auraient été extraites ultérieurement des Éléments. Cependant on peut aussi soutenir l'opinion contraire; car Autolycus, Aristarque de Samos, Archimède énoncent aussi, sous diverses dénominations, en tête de leurs écrits, des postulats du genre de ceux que l'on trouve dans les meilleurs manuscrits d'Euclide, avant les notions communes. Mais « il me semble plus glorieux pour Euclide d'avoir énoncé seulement les trois postulats de construction » (p. 173).

Comme on le voit, sans se prononcer nettement dans la question, M. P. Tannery n'admet au fond l'authenticité que des cinq premiers postulats, et encore fait-il des réserves relativement à 5 et surtout à 4; mais cette opinion est fondée principalement sur des raisons d'une nature plus ou moins subjective.

M. Heiberg (*) arrive à une conclusion différente en tenant compte davantage des données des manuscrits. Parmi les postulats, le 6e seul lui paraît interpolé, parce qu'il n'a pas une place fixe dans ces manuscrits. Quant aux notions communes, il est difficile de les rejeter en bloc. On sait par Proclus qu'elles existaient déjà du temps d'Apollonius. A qui les attribuer, avant celui-ci, si ce n'est à Euclide même? Elles sont distinguées par leur forme extérieure des postulats qui débutent par les mots : *qu'il soit demandé*. Les axiomes 1, 2, 3 au moins sont d'Euclide; 8 et 9 sont un peu douteux, parce que Héron ne les connaît pas, ni Capella; mais elles sont dans Proclus. Proclus,

(*) *Prolegomena*, pp. LXXIX et XC.



en revanche, n'a pas 4, 6 et 7, qui sont donc presque certainement interpolés; quant à 5, il manque dans plusieurs bons manuscrits, comme on l'a dit plus haut. Euclide n'a sans doute admis en fait d'axiomes, en tête des Éléments, que ceux qui avaient une portée générale, savoir 1, 2, 3, 8, 9, bien qu'il en emploie beaucoup d'autres dans le courant de ses démonstrations.

4. ***Raisons d'attribuer tous les axiomes à Euclide.*** Au premier abord, il semble difficile d'échapper à la conclusion de Heiberg touchant les axiomes, et l'on est tout disposé à rejeter, avec lui, 4, 5, 6, 7, parce qu'ils ne sont admis ni par Héron, ni par Proclus, bien qu'ils se trouvent dans de bons manuscrits.

Mais la question change de face quand on l'examine de plus près. Dans Euclide, on ne peut donner au mot *égal* que le sens du mot français *équivalent*, c'est-à-dire *composé de parties superposables*. Or, quand on part de cette notion précise, on reconnait aisément que les notions communes 1, 2, 5, 6, 8 sont de vrais axiomes, ou au moins des théorèmes faciles à démontrer; mais, comme on l'a remarqué à propos de l'une des autres notions communes (*), il semble très difficile d'établir 3, 4, 7, 9 d'une manière élémentaire, bien qu'on ne puisse guère douter de la vérité de ces propositions. Les neuf notions communes, d'ailleurs, se tiennent étroitement : ainsi 4 peut se déduire de 3, et réciproquement; 2, 3, 4, 5 forment un groupe naturel; il en est de même de 6 et 7 et de 8 et 9.

Euclide, *esprit systématique et rigoureux* (**), a pu voir, aussi

---

(*) FAIFOFER, *Elementi di Geometria* (3e édition, 1882, Venise), p. 194, a le premier, croyons-nous, fait remarquer que l'on admet implicitement, dans maintes démonstrations relatives à l'équivalence, qu'*une figure ne peut être équivalente à l'une de ses parties*, bien que ce ne soit pas évident. Dans la 6e édition du même ouvrage (Venise, 1888), il prouve les axiomes 1, 2 d'Euclide et il postule 9, p. 198. Voir les articles de MM. FAIFOFER et DE PAOLIS sur l'axiome 3, dans le *Periodico di Matematica* de BESSO (Rome, 1886), t. I, pp. 13-15, 44-46.

(**) « Euclide, dit le résumé de l'histoire de la géométrie d'Eudème. rassembla les Éléments, *arrangea* beaucoup de ce qu'Eudoxe avait découvert et *compléta* ce qui avait été commencé par Théétète; ensuite il substitua des *preuves irréfutables* aux démonstrations trop laxes de ses prédécesseurs. »

bien que les modernes, les difficultés de la théorie de l'équivalence des figures et les relations logiques entre les neuf notions communes employées par ses prédécesseurs et par lui-même dans les Éléments. Dès lors, il est tout naturel de lui attribuer les neuf axiomes, parce qu'ils forment un ensemble de vérités indispensables pour l'établissement de la géométrie (*). Quant à Héron et à Proclus, ils ne sont pas, au point de vue scientifique, des autorités suffisantes pour nous faire rejeter le témoignage de bons manuscrits, quand il est d'accord avec les principes et avec l'idée que l'on se fait du génie d'Euclide.

5. *Les postulats 4, 5, 6, au point de vue de la géométrie non euclidienne.* Nous croyons que l'on doit attribuer les postulats 4, 5, 6 à Euclide, aussi bien que les axiomes 1 à 9; mais avant d'exposer les raisons qui militent en faveur de cette manière de voir, il est utile d'examiner ces postulats à la lumière des spéculations modernes sur la géométrie non euclidienne. Or, à ce point de vue, selon nous, on doit reconnaître qu'ils sont l'équivalent des postulats regardés aujourd'hui comme nécessaires et suffisants pour exposer scientifiquement la géométrie ordinaire ou géométrie euclidienne.

On peut caractériser les divers systèmes actuels de géométrie où l'on admet comme point de départ la continuité et l'homogénéité de l'espace, par la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans la géométrie riemannienne, cette relation est

$$\cos a\varepsilon = \cos b\varepsilon \cos c\varepsilon,$$

a désignant l'hypoténuse, b et c les côtés, ε une constante qui caractérise l'*espèce* de géométrie considérée dans le *genre* riemannien (**). Dans la géométrie de Lobatschewsky, la relation est

$$\text{Ch}\, a\eta = \text{Ch}\, b\eta\, \text{Ch}\, c\eta,$$

(*) Il forme la στοιχείωσις des axiomes, comme l'ensemble de ses définitions forme celle des vocables géométriques, suivant une remarque de Heiberg (*Prolog.*, p. LXXXIX).

(**) Lorsque l'on donne à ε diverses valeurs, on trouve diverses géométries riemanniennes. Ainsi, si $\varepsilon = 1$, et si $c = b$, l'hypoténuse a du triangle rectangle isocèle de côté b est

où η est aussi une constante spécifique caractéristique. Au point de vue analytique, chacune des relations (1) ou (2) contient l'autre, si l'on y fait $\varepsilon = \eta \sqrt{(-1)}$, ou $\eta = \varepsilon \sqrt{(-1)}$. Pour ε ou η nul, les deux relations précédentes deviennent

$$a^2 = b^2 + c^2\,;$$

celle-ci caractérise la géométrie euclidienne.

Dans toute géométrie, on est forcé d'admettre comme postulat fondamental l'*invariabilité des figures* (*), c'est-à-dire, par exemple, qu'un triangle rectangle isoscèle de côté b, d'hypoténuse a, est toujours identique à lui-même, en quelque endroit qu'on le suppose placé ; ou, si l'on veut, qu'il n'y a pas des lignes droites de deux sortes dans une même espèce de géométrie. Ce principe n'est-il pas l'équivalent du quatrième postulat d'Euclide : *Les angles droits sont égaux?* Les démonstrations de cette proposition ne supposent-elles pas l'invariabilité des figures, ou, au moins, qu'il n'y a qu'une espèce de ligne droite? On peut donc dire que le postulat 4 d'Euclide, ou un autre équivalent, est indispensable pour établir une géométrie quelconque.

Le postulat 5 n'est vrai que dans la géométrie euclidienne, et dans celle de Riemann, autrement dit, il exclut la géométrie de Lobatschewsky ; le postulat 6 est vrai dans la géométrie euclidienne et dans celle de Lobatchewsky, c'est-à-dire qu'il exclut la géométrie de Riemann.

Les postulats 4, 5, 6 sont donc indispensables pour établir la géométrie usuelle d'une manière scientifique. Ils sont d'ailleurs suffisants aussi, comme on peut le déduire, croyons-nous, des recherches contenues dans l'*Essai* de M. De Tilly (**).

---

donnée par la relation $\cos a = \cos^2 b$; si $\varepsilon = 2$, l'hypoténuse a' du triangle rectangle isocèle de côté b serait donnée par $\cos 2a' = \cos^2 (2b)$. On ne peut avoir $a' = a$, comme il est aisé de le voir. L'espace correspondant à $\varepsilon = 1$ n'est pas homogène avec l'espace correspondant à $\varepsilon = 2$. Les angles droits de l'une ne sont pas identiques à ceux de l'autre. On peut faire des remarques analogues sur les géométries caractérisées par les diverses valeurs de η.

(*) De Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (Bordeaux, 1879). n° 27, p. 18.

(**) M. De Tilly prend pour deuxième et troisième postulats fondamentaux les suivants :

6. ***Raisons d'attribuer les postulats 4, 5, 6 à Euclide.*** **Au point de vue de la rigueur absolue, on doit donc regarder les postulats 4, 5, 6 comme aussi dignes d'être attribués à Euclide que les postulats 1, 2, 3 de construction.**

Mais, nous dira-t-on, Euclide n'avait évidemment aucune idée de ces géométries de Riemann et de Lobatschewsky, qui ont conduit les modernes à une étude critique des principes de la géométrie et à la réduction des postulats à un nombre minimum.

A cette objection, nous répondrons : Qu'en sait-on? Le P. Saccheri, dans son *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Milan, 1733), n'a-t-il pas rencontré les trois systèmes de géométrie par une voie très simple, entièrement élémentaire (*)?

Ce que Saccheri a fait, en ne recourant qu'aux premières propositions du livre I des *Éléments*, l'auteur des *Éléments* a pu sans doute le faire aussi. On ne peut donc pas affirmer avec certitude qu'Euclide n'ait pas connu les trois systèmes de géométrie, ou au moins qu'il n'ait été conduit, comme Saccheri, à examiner à fond la question des postulats nécessaires et suffisants pour établir la géométrie usuelle.

Mais on n'est pas forcé d'aller jusque-là pour lui attribuer les postulats 4, 5, 6. Pour le postulat 5, personne ne doute qu'il n'ait dû essayer de l'établir, comme tant de géomètres l'ont fait depuis deux mille ans, jusqu'à ce que MM. Beltrami et De Tilly aient prouvé l'inutilité de leurs efforts. Il est donc tout naturel qu'Euclide ait postulé cette proposition rebelle à toute démonstration. Pour les postulats 4 et 6, Euclide avait d'autres raisons de les énoncer en tête de ses *Éléments*. Depuis que Schiaparelli

---

La distance de deux points de l'espace n'a pas de limite supérieure et peut augmenter indéfiniment; par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite **(*Essai*, n° 39, p. 24, et n° 121, p. 71); ces postulats réunis équivalent aux postulats 6 et 5 d'Euclide, sans qu'ils leur soient équivalents séparément.**

(*) Par la considération d'un quadrilatère plan ABCD, rectangle en B et C, et où BA = CD. Si les angles en A et D sont droits, on a la géométrie ordinaire; s'ils sont aigus, la géométrie de Lobatschewsky; s'il sont obtus, celle de Riemann. Saccheri prouve que l'on doit rejeter cette dernière, en s'appuyant sur des propositions d'Euclide, qui impliquent le postulat 6; en essayant d'exclure de même la géométrie de Lobatschewsky, il est amené à discuter les postulats 4 et 6 et d'autres propositions voisines déjà étudiées par Clavius dans sa célèbre édition d'Euclide (1589).

a restitué le système astronomique d'Eudoxe et que Hultsch a publié les écrits d'Autolycus, on ne doute plus que la géométrie de la sphère ne fût constituée avant Euclide. Si Euclide ne l'a pas fait entrer dans ses *Éléments,* c'est qu'elle était en dehors du plan de son immortel ouvrage ; mais il la connaissait évidemment. Les principales propriétés des grands et des petits cercles lui étaient aussi familières qu'à nous-mêmes. Dès lors, il a dû reconnaître l'insuffisance de sa célèbre définition de la ligne droite : *ligne qui repose semblablement sur tous ses points* (ligne *homogène,* dirions-nous plus brièvement), pour caractériser cet être géométrique dans la géométrie usuelle. Cette définition, en effet, s'applique à un grand et même à un petit cercle de la sphère. Beaucoup de propriétés des grands et des petits cercles sur la sphère sont les mêmes que les propriétés de la droite dans le plan. Comment préciser la notion vague contenue dans la définition rappelée plus haut, autrement dit, comment éviter la géométrie sphérique? On ne le peut qu'au moyen des postulats 4 et 6 (ou de postulats équivalents), complémentaires de la définition de la ligne droite. Car, sur la sphère, on peut faire des angles droits inégaux (non superposables), savoir ceux dont les côtés ne sont pas des arcs de cercles égaux ; de plus, deux grands cercles se coupent toujours en deux points et comprennent un espace. En admettant les postulats 4 et 6, Euclide exclut toute confusion de la géométrie plane avec la géométrie sphérique, et en y réunissant le postulat 5, il a un système de postulats nécessaires et suffisants pour établir la géométrie usuelle (*).

7. *Conclusions.* 1° Les meilleurs manuscrits des *Éléments* d'Euclide contiennent les six postulats et huit des neuf axiomes; l'axiome 5, qui manque seul dans B et F, se trouve dans P et dans V.

2° Tout le monde admet que les trois postulats de construction sont dignes d'Euclide et peuvent lui être attribués.

(*) Au point de vue de la discussion des principes, la connaissance de la géométrie sphérique équivaut à celle de la géométrie de Riemann; l'impossibilité pratique de démontrer le postulat 5, à celle de la géométrie de Lobatschewsky.

3° Selon nous, il en est de même des trois autres dont la géométrie non euclidienne démontre la nécessité pour établir scientifiquement la géométrie usuelle. Cette nécessité, Euclide l'a reconnue pratiquement pour le postulat 5, parce qu'il ne pouvait le démontrer; pour 4 et 6, par la nécessité d'éviter la géométrie sphérique.

4° Les axiomes 1 à 9 forment un ensemble logique de propositions, les unes évidentes ou démontrables, les autres indémontrables ou difficiles à démontrer, mais étroitement apparentées aux premières. Euclide, esprit systématique et rigoureux, n'a pu les séparer les unes des autres, précisément à cause de leur connexion logique.

En résumé, l'étude scientifique des principes de la géométrie conduit donc à la même conclusion que les bons manuscrits : *les six postulats et les neuf axiomes peuvent être attribués à Euclide* (*).

(*) Cette note nous a été inspirée par la lecture des ouvrages du P. Saccheri et de M. Faifofer, cités plus haut.

ANALYSE

DES

RECHERCHES DU P. SACCHERI, S. J.,

SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE

PAR

P. MANSION

Professeur à l'Université de Gand.

M. Beltrami (*) a fait connaître récemment un précurseur italien de Lobatschewsky et de Riemann, qui, près de cent ans avant le premier, a été sur la voie de la découverte des géométries non euclidiennes, le P. Saccheri, S. J. On ignore, dit-il, la date de sa naissance ; on sait seulement qu'il était de San Remo, qu'il commença à enseigner à Pavie en 1697 et qu'il est mort, le 5 octobre 1733, à Milan, où il dirigeait le collège de Brera.

L'année même de sa mort, il a publié à Milan un ouvrage qui suffit pour tirer son nom de l'oubli. Il est intitulé : *Euclides — ab omni naevo vindicatus : — sive — conatus geometricus — quo stabiliuntur — Prima ipsa universae Geometriae Principia. — Auctore — Hieronymo Saccherio — Societatis Jesu — in Ticinensi Universitate Matheseos Professore. — Opusculum ex*^{mo}. *Senatui — Mediolanensi — Ab Auctore Dicatum — Mediolani, MDCCXXXIII. — Ex Typographia Pauli Antonii Montani.*

(*) Voir la note *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski*, par E. BELTRAMI, dans les comptes rendus de l'Académie (royale) des *Lincei* de Rome, t. V, 1er semestre, fascicule 6, séance du 17 mars 1889, pp. 441-448. Nous devons la connaissance de cette note de M. Beltrami au R. P. Thirion, S. J, qui nous a aussi communiqué l'ouvrage même du P. Saccheri.

Superiorum permissu. L'ouvrage est un in-quarto de XVI-142 pages, avec 6 planches contenant 55 figures.

Dans la dédicace au Sénat de Milan (pp. III-V), l'auteur fait observer qu'il est extrêmement utile d'établir sur des bases absolument sûres les principes de toute science. On l'a tenté depuis longtemps pour la géométrie, mais il reste cependant quelque chose à faire. Dans son ouvrage, l'auteur a essayé de compléter les travaux de ses devanciers, et il l'offre au Sénat comme la Néostatique publiée par lui antérieurement. Vient ensuite (p. VII) l'approbation du Provincial de la Compagnie de Jésus, datée du 16 août 1733, puis (p. VIII) celle de l'Inquisiteur général, de l'Archevêque et du Sénat de Milan, du 13 juillet 1733.

Dans sa préface (pp. IX-XI), le P. Saccheri, après avoir exprimé toute son admiration pour Euclide, observe que, cependant, il y a trois taches dans ses Éléments : la première est relative au célèbre postulatum de la théorie des parallèles, la deuxième à la définition 6 du livre V, la troisième à la définition 5 du livre VI. Le but de son travail est de faire disparaître ces trois défauts. Les pages XII-XV en contiennent ensuite une analyse détaillée, et la page XVI quelques errata.

L'ouvrage du P. Saccheri est divisé en deux livres et chacun en deux parties. Le premier livre (pp. 1-101, avec appendice, pp. 139-142; 5 pl. avec 48 fig.) est consacré tout entier au postulatum d'Euclide et contient trente-neuf propositions avec corollaires, lemmes et remarques. Le second livre traite, dans la première partie, de la définition 6 du livre V d'Euclide, et incidemment de la proposition 2 du livre XII; dans la seconde, de la définition 5 du livre VI.

L'auteur croit, *à priori*, à la vérité du postulatum d'Euclide, mais, selon lui, il n'aurait pas dû être appelé axiome (comme le fait Clavius dans l'édition d'Euclide dont il se sert), et il aurait fallu le démontrer. C'est en cherchant à l'établir rigoureusement qu'il expose, sous une forme très nette, les premiers principes de la géométrie non euclidienne.

Nous allons faire connaître la suite des propositions de

l'auteur, en supprimant, pour abréger, les démonstrations. L'auteur ne suppose connues du lecteur que les propositions 1-26 du livre I des Éléments d'Euclide, c'est-à-dire ce qui précède la théorie des parallèles. Son but est de démontrer le 5[e] postulat d'Euclide (13[e] axiome de l'édition de Clavius) : *Deux droites coupées par une troisième et faisant avec celle-ci des angles intérieurs d'un même côté, dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté.*

Première partie. I. Dans un quadrilatère ABDC, rectangle en A et B et à côtés opposés AC, BD égaux, les angles en C et D sont égaux.

II. La médiane MH, qui divise en deux parties égales les côtés AB, CD de ce quadrilatère birectangle isoscèle ABDC, est perpendiculaire à AB et à CD.

III-IV. Selon que les angles en C et en D, dans le quadrilatère isoscèle ABDC, sont droits, aigus ou obtus, on a $CD = AB$, $CD > AB$, ou $CD < AB$, et réciproquement.

Corollaires 1-2. Si le quatrième angle d'un quadrilatère trirectangle est obtus, les côtés adjacents à l'angle obtus sont plus petits que les côtés opposés; si le quatrième angle est aigu, les côtés adjacents à cet angle sont plus grands que les côtés opposés et, *à fortiori*, qu'une partie de ceux-ci.

3. Tout ce qui précède et tout ce qui suit est vrai si AC et BD sont infiniment petits.

Définitions. Il y a trois hypothèses à distinguer, suivant la nature des angles C et D, dans la proposition I : *l'hypothèse de l'angle droit,* celle *de l'angle obtus* et celle *de l'angle aigu.*

Notes. 1. Ces hypothèses correspondent respectivement à la géométrie euclidienne, à la géométrie de Riemann et à celle de Lobatschewsky.

2. Dès la proposition III, l'auteur se sert de la proposition (Euclide, I, 16) : *Le supplément d'un angle quelconque d'un triangle est plus grand que chacun des deux autres.* La démonstration de ce théorème s'appuie implicitement sur le postulat 6 d'Euclide : *Deux droites ne peuvent contenir un espace* (ou deux droites ne peuvent avoir deux points communs sans coïncider). Ce postulat et la proposition I, 16 ne sont pas toujours vrais dans la géométrie de Riemann ou dans l'hypothèse de l'angle obtus. Il est donc tout naturel

que, dans la suite, Saccheri parvienne à prouver l'incompatibilité de cette hypothèse avec les propositions admises par lui.

3. Saccheri, comme on le verra plus bas, a une idée fausse des infiniment petits. Par ce terme, il entend les pseudo-infiniment petits de Jean Bernouilli, c'est-à-dire *de soi-disant quantités fixes différentes de zéro et qui sont néanmoins plus petites que toute quantité donnée.* C'est cette notion contradictoire qui l'a conduit aux erreurs qui déparent son beau livre et l'a empêché de faire la découverte de la géométrie de Lobatschewsky, dont il possédait les éléments.

V. Si l'hypothèse de l'angle droit est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

VI. Si l'hypothèse de l'angle obtus est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

VII. Si l'hypothèse de l'angle aigu est vraie dans un seul cas, elle l'est toujours.

4. La démonstration de la proposition VI n'est pas absolument rigoureuse dans Saccheri; mais elle peut être rendue telle, en prouvant que, dans le quadrilatère de la proposition I, CD diffère aussi peu que l'on veut de AB, si AC, BD sont suffisamment petits et observant qu'une grandeur continue passe par toutes les valeurs intermédiaires entre deux de ses valeurs effectives. La proposition VII est une suite de V et VI.

VIII-IX. Dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus est égale, supérieure ou inférieure à un droit, suivant qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus, ou celle de l'angle aigu.

X. De deux obliques, celle-là s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire, qui est la plus longue, et réciproquement.

XI-XII. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans celle de l'angle obtus, une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent.

XIII. Dans ces deux hypothèses, le postulatum d'Euclide est vrai; autrement dit, deux droites qui font avec une troisième, d'un côté, des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent de ce côté.

Remarques. **1. Même si XI-XII étaient prouvés dans l'hypothèse de l'angle aigu, on ne pourrait en déduire directement XIII**

au moyen de VIII-IX, comme nous le faisons ici dans les deux autres hypothèses; mais on le pourrait d'une manière indirecte.

2. On peut toujours mener deux droites faisant avec une troisième des angles donnés dont la somme est inférieure à deux droits et qui se rencontrent, pourvu que la distance des angles ne soit pas donnée.

XIV. L'hypothèse de l'angle obtus se détruit elle-même. Car, si elle est vraie, le postulatum d'Euclide est vrai, comme on vient de le voir; on peut donc établir la théorie des parallèles comme Euclide, puis prouver, dans I, que les angles en C et D sont droits.

Autre démonstration.

5. Cette seconde démonstration repose sur EUCLIDE I, 16, comme nous l'avons fait observer pour III dans la note 2.

XV-XVI. Suivant que la somme des trois (quatre) angles d'un triangle (quadrilatère) est égale, supérieure ou inférieure à deux (quatre) droits, c'est l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu qui est vraie.

XVII. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, on peut trouver une perpendiculaire et une oblique à une même droite qui ne se rencontrent pas. Deux procédés : 1° ABH étant un triangle rectangle en A, on mène HD tel que l'angle BHD = HBA, puis BD perpendiculaire à HD. Les triangles AHB, DHB sont égaux, BD est une oblique par rapport à AB, qui ne rencontre pas AH; 2° soit AHMB un quadrilatère trirectangle (en A,B,H). La ligne HA ne rencontre pas BD, perpendiculaire à HM, oblique à AB.

Remarque. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite si XVII n'était pas vrai, ou si, comme on le verra (XXVII), on savait qu'une oblique, sous un angle aigu donné, rencontre toujours la perpendiculaire.

XVIII. L'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu est vraie selon que l'angle B d'un triangle ABC, inscrit dans une circonférence de diamètre BC, est égal, supérieur ou inférieur à un angle droit.

XIX. Si l'on prolonge l'hypoténuse d'un triangle rectangle d'une longueur égale à elle-même et que l'on projette ce prolongement sur le prolongement du côté non adjacent du triangle, l'hypothèse de l'angle droit, celle de l'angle obtus ou celle de l'angle aigu sera vraie selon que la projection sera égale, supérieure ou inférieure à ce côté.

XX. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si B est au milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle AMC et si BD est perpendiculaire à AC, alors BD est égal ou inférieur à la moitié de MC.

XXI. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans celle de l'angle aigu, la distance d'un point qui s'éloigne indéfiniment sur un côté d'un angle, à l'autre côté, croit indéfiniment.

Corollaire. Il en est donc toujours ainsi, puisque l'hypothèse de l'angle obtus est rejetée.

6. Une fois arrivé ici, l'auteur, qui a démontré les vingt et une propositions précédentes dans les pages 1-29, consacre les pages 29-43 à une étude historico-critique en quatre remarques sur des essais de Proclus, Borelli, Nassareddin, Wallis et à diverses considérations relatives au postulatum d'Euclide et aux preuves physiques que l'on peut en donner. Voici un aperçu de cette partie de son ouvrage :

Remarques. 1. Proclus a essayé de prouver la proposition XXI. Il a réussi à démontrer seulement qu'un point du côté d'un angle est de plus en plus éloigné de l'autre côté de l'angle, quand il s'éloigne du sommet; mais il n'a pas prouvé que la distance croît au delà de toute limite. Eût-il démontré d'ailleurs la proposition XXI complète, le postulatum ne s'ensuit pas immédiatement; pour que le postulatum en fût une conséquence immédiate, il faudrait avoir établi préalablement que deux perpendiculaires à une même droite n'ont pas leurs points de plus en plus éloignés les uns des autres lorsqu'on les prend à des distances de plus en plus grandes de la perpendiculaire commune.

2. Borelli critique à tort la définition des parallèles d'Euclide; cette définition est irréprochable, parce que Euclide donne le moyen de construire deux parallèles sans s'appuyer sur le postulatum. Borelli définit la parallèle à une droite en disant que c'est la ligne équidistante de la première; cette équidis-

tante (déjà considérée auparavant par Clavius) est une droite, d'après la définition d'Euclide, car elle est située semblablement par rapport à tous ses points. Mais il y a une confusion dans ce dernier raisonnement : l'équidistante est située semblablement par rapport à la droite primitive, mais on ne sait pas si elle jouit de cette propriété par rapport à elle-même.

Voici divers moyens de vérifier physiquement si le postulatum est vrai : 1° Si, dans le quadrilatère birectangle isoscèle ABDC, de la proposition I, la perpendiculaire MN abaissée du point N de CD sur AB est égale à AC et à BD, c'est l'hypothèse de l'angle droit qui est vraie; 2° il en est de même si l'angle inscrit dans une demi-circonférence est droit; 3° ou si l'on peut inscrire dans une demi-circonférence la moitié d'un hexagone ayant ses côtés égaux au rayon.

3. Nassareddin fait deux postulats : 1° si les perpendiculaires abaissées d'une droite sur une autre font, d'un même côté, des angles aigus avec la première, ces perpendiculaires sont toujours de plus en plus courtes du côté des angles aigus, de plus en plus longues de l'autre côté. Cette proposition n'est pas un postulat, on peut la démontrer par le corollaire 2 de la proposition III; 2° réciproquement, si les perpendiculaires sont de plus en plus courtes d'un côté, les angles des perpendiculaires à l'une des droites, avec l'autre, sont aigus de ce côté. On peut objecter que ces angles aigus peuvent croître jusqu'à devenir droits, ce qui renverse toute la démonstration de l'auteur arabe. Ensuite, comme l'a remarqué Wallis, il aurait pu tout aussi bien admettre directement que les deux droites convergentes de son second postulat se rencontrent, car nous prouverons (XXV) que si les perpendiculaires décroissantes avaient une limite différente de zéro, l'hypothèse de l'angle aigu peut être démontrée fausse.

Wallis déduit le postulatum de l'existence, admise *à priori*, de deux figures semblables, deux triangles, par exemple, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels. Mais il n'y a pas besoin d'admettre autant; il est facile d'établir la vérité de l'hypothèse de l'angle droit, s'il existe deux triangles inégaux équiangles, sans qu'on doive s'inquiéter de la proportionnalité des côtés.

4. Euclide a pu arriver à se convaincre de la vérité du postulatum par la considération de la figure suivante : On peut construire un triangle ABC ayant deux angles donnés A, B, pourvu que leur somme soit inférieure à deux droits. Prolongeons indéfiniment AC, BC, et, en laissant l'angle B constant, faisons mouvoir BC de manière que B s'éloigne indéfiniment de A. Il est clair que le postulatum serait démontré, si BC rencontrait toujours AC, quelque éloigné de A que fût B, ou si l'angle ABC n'avait pas zéro pour limite. Si cet angle devenait nul, AC et BC, à ce moment, auraient un prolongement unique, ce qui serait absurde (voir Prop. XXXIII). Cet angle ne pouvant devenir nul, AC sera toujours rencontré par BC. Or, si cela a lieu pour un angle A aussi petit qu'on le veut, on peut établir le postulatum (XXVII).

7. On observera ici que Saccheri suppose que si ACB a pour limite zéro, cela signifie qu'il y a un point C où cet angle est nul. C'est, au fond, l'erreur déjà signalée dans la note 3.

XXII. Si un quadrilatère ABDC est birectangle en A et B, et si les angles en C et D sont aigus, on peut mener entre AC et BD une droite MN perpendiculaire à la fois à AB et à CD.

8. Dans sa démonstration, Saccheri admet implicitement que certains angles variables, considérés par lui, varient d'une manière continue, ce qui, au reste, est exact et assez facile à démontrer.

XXIII. Deux droites ou bien ont une perpendiculaire commune, ou se rencontrent à une distance finie, ou enfin se rapprochent sans cesse l'une de l'autre.

Corollaires. 1. Si deux droites se rapprochent sans cesse l'une de l'autre, les perpendiculaires abaissées des points de la première sur la seconde font avec la première des angles obtus du côté des perpendiculaires les plus longues.

Remarque. Si la somme des angles internes, formés par les deux droites avec une sécante, est égale à deux droits, on peut abaisser du milieu de la partie de la sécante interceptée entre les deux droites une perpendiculaire commune.

2. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, quand il existe une

perpendiculaire commune, les deux droites, d'après III, corollaire 1, s'éloignent sans cesse l'une de l'autre.

9. Ce corollaire 2 est identique, au fond, avec EUCLIDE, I, 27 et 28. Saccheri croit devoir le démontrer, parce que la démonstration d'Euclide s'appuie sur I, 16 : *Dans un triangle, le supplément d'un angle est plus grand que chacun des deux autres*. Or, dans le cas actuel, dit Saccheri, on pourrait objecter que les deux perpendiculaires à une même droite se rencontrent à l'infini, et l'on ne sait pas si I, 16 s'appliquerait à un triangle ayant un côté fini et les deux autres infinis. Comme on le voit, Saccheri accorde une existence réelle aux pseudo-infiniment grands, c'est-à-dire *à de soi-disant quantités déterminées plus grandes que toute quantité donnée*.

XXIV. Deux droites quelconques AX, BY étant données, la seconde BY, perpendiculaire à AB, à A'B', A''B'', A'''B''', A', A'', A''' étant sur AX à des distances croissantes de A et B'B'' étant égal à B''B''', la somme des angles du quadrilatère A'B'B''A'' est inférieure à celle des angles du quadrilatère A''B''B'''A''', si l'on a A'B' > A''B'' > A'''B''', soit que ces droites AX, BY se rencontrent ou non.

Corollaire. Ce théorème serait vrai, même si A'''B''' était une perpendiculaire commune.

Remarque. Dans le cas où les deux droites AX, BY se rapprochent sans cesse, toute perpendiculaire à BY en un point K, au delà de B, du côté où les droites se rapprochent, rencontre AX.

XXV. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si deux droites se rapprochent sans cesse, elles se rapprochent indéfiniment, autrement dit, l'une est asymptote de l'autre.

Corollaires. 1. La proposition précédente a été annoncée dans la remarque 3, après la proposition XXI.

2. On ne peut pas établir la *géométrie euclidienne* en appelant parallèles deux droites perpendiculaires à une même troisième et concluant de cette définition que deux droites faisant avec une troisième des angles dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent à une distance finie ou infinie; car il faudrait démontrer préalablement que ces droites n'ont nulle part de perpendiculaire commune.

XXVI. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, si AX est oblique à

AB et asymptote à BY, perpendiculaire à AB, toute perpendiculaire à AB, entre A et B, rencontrera AX.

Corollaires. 1. Toute perpendiculaire à AB, en un point situé au delà de B, ne rencontre pas AX, même à l'infini.

2. Une perpendiculaire à AB, en un point suffisamment proche de A, rencontre AX.

3. AX, asymptote de BY, ne peut couper BY; car, si cela arrivait, d'un point de AX, au delà de l'intersection, on pourrait abaisser une perpendiculaire sur AB; le point d'intersection serait au delà de B, et, par suite, on pourrait prouver que BY rencontre AX à une distance finie.

10. Ce corollaire, inutile d'après l'auteur lui-même, repose de nouveau sur l'idée fausse que l'auteur se fait de l'infini.

XXVII. Si une oblique AX à AB, pour un angle BAX suffisamment petit, rencontre, à une distance finie ou infinie, toutes les perpendiculaires BY à AB, quelque grande que soit la distance AB, on peut établir la fausseté de l'hypothèse de l'angle aigu.

Remarques. 1. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite, si l'on pouvait établir que deux droites AX, BY, qui font avec une troisième des angles internes d'un même côté, ayant une somme inférieure à deux droits, n'ont pas de perpendiculaire commune, quelle que soit la distance AB.

2. Nous avons annoncé le théorème XXVII dans la remarque 4, après XXI.

3. L'hypothèse de l'angle aigu serait détruite aussi, comme on l'a vu (XVII), si, pour tout angle aigu XAB, AX rencontrait BY pour une seule distance AB, si petite qu'elle fût.

XXVIII. Si AX est oblique à AB et asymptote à BY, perpendiculaire à AB, et si XY est perpendiculaire à BY, l'angle AXY est obtus, décroît quand AX croît et a pour limite un angle droit.

Corollaire. AX et BY tendent à avoir une perpendiculaire commune en un point commun à l'infini.

XXIX. Toute droite AC, menée dans l'angle XAB aigu, rencontre la perpendiculaire BY à AB, si AX est asymptote de BY, en un point T, à une distance finie.

Corollaires. 1. Si ZAB est un angle non obtus, supérieur à XAB, AZ n'est pas asymptote de BY.

2. Si T est un point de la perpendiculaire BY à AB, l'angle TAB, quand TB croît indéfiniment, n'a pas de valeur maxima, mais tend vers la limite inaccessible XAB.

XXX. Il n'y a pas de dernière oblique AY à AB ayant avec BY, perpendiculaire à AB, une perpendiculaire commune.

Corollaire. La perpendiculaire commune, quand elle existe pour une oblique AX et une perpendiculaire BY à AB, est d'autant plus petite que l'angle XAB est plus petit.

XXXI. Cette perpendiculaire commune a pour limite zéro, quand l'angle XAB décroît.

XXXII. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, il existe un angle XAB, tel que AX ne rencontre pas BY perpendiculaire à AB; toute oblique comprise dans l'angle XAB rencontre BY; toute oblique faisant un angle aigu plus grand que XAB avec AB a, avec BY, une perpendiculaire commune, à une distance finie.

XXXIII. L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse. Car, si elle était vraie, l'oblique AX à AB, asymptote à la perpendiculaire BY à AB, aurait à l'infini, avec celle-ci, une perpendiculaire commune, en un point commun, ce qui est contraire à la nature de la ligne droite, comme nous allons le montrer.

11. L'auteur, comme on le voit, s'appuie ici sur la fausse notion de l'infini que nous avons déjà signalée. Les propositions XXII à XXXII, où il étudie avec tant de rigueur l'hypothèse de l'angle aigu, sont exposées pp. 43-70. La proposition XXXIII tient en quatorze lignes, mais l'auteur la fait suivre, pp. 70-85, de cinq lemmes sur les premiers principes de la géométrie; puis, à la page 86, il revient sur sa démonstration de la proposition XXXIII.

Lemme 1. Deux droites ne comprennent pas un espace. Car une droite doit rester immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points comme sur des pivots.

Corollaire 1. Il existe une ligne droite entre deux points fixes, savoir le lieu des points immobiles compris entre deux positions d'une ligne passant par les deux points fixes et que l'on fait pivoter sur ces points fixes.

2. Il existe un plan tel que le définit Euclide.

Lemme 2. Deux droites ne peuvent avoir un segment commun (pp. 73-81).

Corollaire. Deux droites, même infiniment voisines, ne peuvent enclore un espace. Une droite ne peut se bifurquer, même en deux segments infiniment voisins. Du lemme 2 on peut déduire la proposition 4 du livre XI d'Euclide.

Lemme 3. Deux droites qui ont un point commun ne se touchent pas, mais se coupent.

Lemme 4. Tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales.

Remarque. Clavius dit que Thalès a démontré cette proposition; mais il ne l'a peut-être pas fait avec rigueur.

Lemme 5. Tous les angles droits rectilignes sont égaux et ne diffèrent pas même infiniment peu.

Corollaire. La perpendiculaire à une droite, en un point, est absolument unique.

Conséquence des cinq lemmes. La démonstration de la proposition XXXIII suit évidemment des lemmes précédents avec leurs corollaires.

Remarque. Nous allons montrer autrement que l'hypothèse de l'angle aigu est fausse.

12. Malgré le vague et l'insuffisance des raisonnements de Saccheri dans les démonstrations des lemmes cités plus haut, malgré ses fausses idées sur l'infini, on observera néanmoins qu'il a bien reconnu que les propositions énoncées lemmes 1 (postulat 6 d'Euclide) et 5 (postulat 4 d'Euclide) ne sont pas de vrais axiomes.

Deuxième partie. XXXIV. L'équidistante d'une droite, dans l'hypothèse de l'angle aigu, est située au-dessus de ses cordes; autrement dit, la corde est située entre la droite et l'équidistante.

XXXV. Elle est en dessous de toute perpendiculaire, en l'un de ses points, à une de ses ordonnées; autrement dit, l'équidistante est située entre la droite et la perpendiculaire.

XXXVI. Cette perpendiculaire lui est tangente; c'est-à-dire que toute droite qui fait un angle aigu avec l'ordonnée de l'équidistante, en un point de celle-ci, la coupe en un second point.

XXXVII. L'équidistante est égale à sa base. Car on peut la

diviser en 2^n parties égales, dont chacune, pour $n = \infty$, est infiniment petite, par suite, égale à la tangente qui se confond avec la courbe, *et à la partie correspondante de la base.*

Remarques 1-2. Essai de démonstration de la partie du raisonnement imprimée en italiques.

13. Voici le texte de l'absurde raisonnement résumé dans les mots que nous venons de souligner (KM est une ordonnée de l'équidistante, perpendiculaire à AB en M) : « Infinitesima K, spectans ad curvam, aequalis omninò erit infinitesimae K spectanti ad tangentem. Constat autem infinitesimam K, spectantem ad tangentem, nec majorem, nec minorem, sed omnino aequalem esse infinitesimae M spectanti ad basim AB; quia nempe recta illa MK intelligi potest descripta ex fluxu semper ex aequo ejusdem puncti M usque ad eam summitatem K (p. 92). » Par *infinitesima*, l'auteur entend les points (*punctis, seu mavis infinitesimis*, p. 94). Dans la remarque 1, il dit : *Inde fit ut punctum* M *in ea* BA *censendum sit exactissime aequale puncto* K ! Comment Saccheri n'a-t-il pas vu que ce raisonnement, appliqué à deux circonférences concentriques, permettrait de prouver qu'elles ont des longueurs égales ?

XXXVIII. L'hypothèse de l'angle aigu est fausse. Car, si elle était vraie, l'équidistante, qui a une longueur supérieure à celle de sa corde et, par suite, de sa base, projection de sa corde, devrait aussi être égale à cette base, d'après XXXVII.

Remarque. Dans l'hypothèse de l'angle obtus, l'équidistante aurait sa convexité tournée vers sa base, qui serait plus grande que sa corde. On ne pourrait donc pas faire le raisonnement qui sert à prouver XXXVIII.

XXXIX. Le postulatum d'Euclide est prouvé, comme conséquence de XIII, par le fait de l'exclusion des deux hypothèses de l'angle obtus (XIV) et de l'angle aigu (XXXIII, XXXVIII); la première, par réduction à l'absurde, la seconde, par la nature de la ligne droite et par réduction à l'absurde.

Remarque. L'auteur termine par diverses réflexions sur la marche suivie dans son livre et avoue que sa réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu n'est pas parfaite : « Circa hypothesin anguli obtusi res est meridiana luce clarior... Contra vero non devenio ad probandam falsitatem alterius hypothesis, quae est anguli acuti, nisi prius demonstrando quod linea, cujus omnia puncta aequidistent a quadam supposita recta linea in eodem cum ipsa plano existente, aequalis sit ipsi tali rectae; *quod ipsum*

tamen non videor demonstrare ex visceribus ipsiusmet hypothesis, prout opus foret ad perfectam redargutionem » (p. 98).

Appendice. On ne peut mesurer les figures, même rectilignes, sans le secours du postulatum, parce que, sans cette proposition, on ne peut subdiviser les rectangles en carrés égaux.

Conclusion. Le livre du P. Saccheri est écrit avec une rigueur vraiment euclidienne, sauf dans les passages où interviennent ses fausses idées sur l'infini et les infiniment petits. Si l'auteur avait étudié Archimède et Newton avec le même soin que les Éléments d'Euclide, il y aurait appris à manier avec précision et sûreté ces expressions conventionnelles de la langue mathématique, et probablement il serait arrivé, un siècle avant Lobatschewsky et Bolyai, à cette conclusion : On peut édifier un système de géométrie parfaitement rigoureux, différent de celui d'Euclide. Peut-être même aurait-il découvert la géométrie riemannienne, puisque son livre contient quelques propositions qui s'y rapportent, à côté de beaucoup d'autres qui appartiennent à la géométrie de Lobatschewsky.

Mais, malgré ses défauts, l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* est l'ouvrage le plus remarquable que l'on ait écrit sur les Éléments avant Lobatschewsky et Bolyai. Il est probable qu'il n'a pas été sans influence sur le développement de la science. Il n'est pas resté inconnu; il a été l'objet d'un compte rendu (superficiel, il est vrai) en 1736, dans les *Acta Eruditorum*. Il se trouvait probablement à la bibliothèque de Göttingen vers 1800, car il est marqué d'un astérisque dans la *Bibliotheca mathematica* de Murhard; dans cet ouvrage il est signalé (t. II, p. 43) parmi les écrits consacrés à l'explication, à la critique ou à la défense d'Euclide (*Einleitungs- und Erläuterungsschriften, auch Angriffe und Vertheidigungen des Euklides*). Il a donc eu quelque notoriété, et l'on peut conjecturer qu'il n'a échappé ni à Gauss, ni aux autres géomètres qui se sont occupés, dans la première moitié de ce siècle, des principes fondamentaux de la géométrie. Quoi qu'il en soit, le P. Saccheri est, chronologiquement, le premier qui ait écrit une vraie étude critique sur le postulatum, et il doit être regardé comme le précurseur des géomètres non euclidiens modernes.

INFLUENCE DU RÉGIME LACTÉ SUR L'ÉLIMINATION DE L'ACIDE URIQUE

PAR

le Dr E. LAHOUSSE
chargé du cours de physiologie à l'Université de Gand.

I. J'ai remarqué souvent que le régime lacté jouit d'une influence favorable sur les diverses manifestations de la diathèse urique.

Comment agit le lait sur l'élimination de l'acide urique par l'urine? Cette question de physiologie expérimentale m'intéressait d'autant plus, qu'en 1885 Rumanoff avait trouvé que la quantité d'acide urique ne variait pas et que, par conséquent, la prescription du lait dans la diathèse urique manquait de toute base scientifique.

II. J'ai répété les expériences de Rumanoff en m'efforçant de remplir les conditions expérimentales les plus rigoureuses.

Mes expériences ont été instituées sur un sujet âgé de 38 ans et jouissant d'une bonne santé.

Lorsqu'on fait des recherches sur la nutrition, il faut que le sujet sur lequel on expérimente se trouve en équilibre d'azote, c'est-à-dire que l'azote des excreta (selles et urines) soit en quantité égale à l'azote des ingesta. Or, cet équilibre s'obtient toujours quand on se soumet pendant plusieurs jours de suite au même régime alimentaire.

Le régime consista, outre les boissons rafraîchissantes, en viande, pommes de terre, pain et beurre dont l'ensemble ren-

fermait 90 grammes d'albumine, 60 grammes de graisse et 200 grammes de fécule. Ce régime ne différait guère du régime habituel; aussi l'équilibre d'azote s'obtint avec la plus grande facilité.

Lorsque l'équilibre fut dûment constaté, nous administrâmes, quatre jours de suite, 1 litre et demi de lait préalablement analysé et contenant 50 grammes de graisse et 60 grammes d'albumine. Le déficit en hydrocarbures, graisse et albumine, fut comblé par une quantité exactement déterminée de viande, de pain et de beurre. Il s'agit donc d'un régime lacté incomplet, renfermant la même quantité de principes que la ration d'équilibre.

L'azote fut dosé dans les urines et les selles d'après la méthode de Kyedahl, modifiée par Lehmann et Petri.

Les urines et les selles de vingt-quatre heures furent soigneusement recueillies et mélangées.

Le poids spécifique des urines fut recherché à l'aide de l'aréomètre, et la quantité des fixa déterminée en multipliant les deux derniers chiffres du nombre indiqué à l'aréomètre par le coefficient de Häser. Le dosage de l'acide urique dans les urines a été fait d'après la méthode de Salkowsky. C'est la méthode la plus exacte, mais la plus compliquée. C'est également celle-là dont s'est servi Rumanoff.

On précipite 250 c. c. d'urine avec 50 c. c. de la mixture magnésienne. On filtre et l'on recueille 240 c. c. du mélange, ce qui correspond à 200 c. c. d'urine. On précipite l'acide urique à l'aide d'une solution ammoniacale de nitrate d'argent à 3 °/₀₀, jusqu'à ce qu'il ne se forme plus de précipité. On filtre, on lave le précipité et on le réduit avec l'hydrogène sulfuré. On soumet le mélange à l'ébullition et l'on filtre de nouveau. On réduit à un petit volume le liquide filtré, on précipite l'acide urique avec l'acide chlorhydrique, on recueille le précipité, on lave, on sèche et l'on pèse.

III. Voici les deux séries d'expériences faites à trois semaines d'intervalle. Nous désignons par α et β deux dosages différents se servant mutuellement de contrôle.

Première série d'expériences.

Jours.	Régime.	Quantité absolue d'urine.	Poids spécifique de l'urine.	Fixa de l'urine.	Azote de l'urine.	Azote des selles.	Acide urique de l'urine.
		gr.		gr.	gr.	gr.	gr.
I.	ordinaire.	1205	1020	56,153	α) 12,119	α) 1,063	α) **0,493**
					β) 12,150	β) 0,982	β) **0,508**
II.	»	1195	1019,5	54,295	α) 11,153	α) 0,909	α) **0,473**
					β) 11,200	β) 0,940	β) **0,481**
III.	»	1200	1019	53,124	α) 11,210	α) 1,103	α) **0,453**
					β) 11,201	β) —	β) **0,461**
IV.	lacté.	2288	1012	63,972	α) 12,108	α) 1,530	α) —
					β) 12,130	β) 1,492	β) **0,191**
V.	»	1793	1013	54,110	α) 11,327	α) 1,050	α) **0,201**
					β) 11,304	β) 1,120	β) **0,187**
VI.	»	1305	1017,5	53,211	α) 11,591	α) 0,908	α) **0,208**
					β) 11,574	β) 0,883	β) **0,173**
VII.	»	1280	1020	59,649	α) 11,730	α) 1,009	α) **0,210**
					β) —	β) 1,107	β) **0,190**
VIII.	ordinaire.	1200	1018	50,328	α) 10,234	α) 0,639	α) **0,318**
					β) 10,187	β) 0,800	β) **0,297**
IX.	»	1215	1019	53,788	α) 11,190	α) 0,997	α) **0,481**
					β) —	β) 1,201	β) **0,459**
				Deuxième série d'expériences.			
I.	ordinaire.	1300	1018	54,522	α) 11,831	α) 1,320	α) **0,501**
					β) 11,780	β) —	β) **0,483**
II.	»	1210	1019,5	54,976	α) 11,619	α) 1,200	α) **0,486**
					β) 11,590	β) 1,298	β) **0,490**
III.	lacté.	1810	1014	59,042	α) 12,310	α) 0,980	α) **0,132**
					β) —	β) 0,889	β) **0,098**
IV.	»	1400	1017	55,454	α) 11,789	α) —	α) **0,187**
					β) 11,801	β) —	β) **0,159**
V.	»	1300	1019	57,551	α) 11,970	α) 0,998	α) **0,167**
					β) 11,900	β) 1,200	β) **0,180**
VI.	»	1315	1018,5	52,738	α) 11,672	α) 0,980	α) **0,201**
					β) 11,800	β) 0,865	β) **0,198**
VII.	ordinaire.	1175	1019	52,017	α) 10,289	α) 1,320	α) **0,432**
					β) 10,307	β) 1,598	β) **0,399**

Nos expériences démontrent donc, contrairement à celles de Rumanoff, que sous l'influence du lait la quantité d'acide urique diminue dans les urines.

PÉRIODE GERMINATIVE

DE LA

TUBERCULOSE PULMONAIRE

PAR

M. le Dr HUYBERECHTS

La phtisie pulmonaire a été divisée d'après les auteurs en deux ou trois périodes. Louis, Grisolle, Van Lair considèrent une première période ou de formation tuberculeuse, et une deuxième période ou période de ramollissement et d'élimination des produits tuberculeux.

Laënnec admettait trois périodes : Dans la première, le tubercule se trouverait à l'état de crudité; dans la deuxième, à l'état de ramollissement; dans la troisième il s'éliminait.

Bayle écrivait au commencement de ce siècle : « On a admis trois degrés dans la phtisie pulmonaire : la phtisie commençante, la phtisie confirmée et la phtisie du troisième degré.

« La phtisie commençante ne date que de l'époque où le malade éprouve de la toux, de la gêne respiratoire, des mouvements fébriles. Je crois qu'on devrait admettre un temps où la maladie serait désignée sous le nom de phtisie occulte ou de germination de la phtisie. Car dans plusieurs espèces, avant l'instant où se manifestent les premiers symptômes, il est un intervalle pendant lequel le malade, qui a déjà le poumon lésé, paraît encore jouir de la meilleure santé. Rien ne décèle encore la lésion et aucun symptôme ne fait craindre la phtisie. »

L'auscultation était alors inconnue ou du moins insuffisamment connue. Rien d'étonnant dès lors que Bayle n'ait décrit

aucun symptôme de cette toute première période qu'il soupçonnait avec raison.

Laënnec, qui a donné un si grand élan à l'auscultation, ne trouve non plus aucun symptôme à cette période. Voici ce qu'il écrit : « Des tubercules petits, séparés les uns des autres par du tissu pulmonaire sain, ne peuvent être reconnus, mais le plus souvent alors la santé est encore parfaite, et bien rarement à cette époque la toux qu'occasionne l'affection engage le malade à consulter le médecin. »

Si cette période n'avait pas alors de symptomatologie décrite, son existence était cependant soupçonnée.

Voyons d'abord quelle en est la pathologie. On sait que l'acini pulmonaire n'est qu'un bourgeonnement, une dilatation systématique de la bronchiale acineuse. Celle-ci est une ramification d'une bronche intralobulaire et elle forme à l'acini un pédicule. Cette bronchiale acineuse se transforme en alvéole par trois bourgeonnements successifs : 1° le vestibule; 2° les canaux respiratoires, et 3° l'infundibulum.

Le bacille de Koch, arrivé dans l'appareil respiratoire, se fixe d'abord dans le vestibule de la bronchiale acineuse, et là il provoque par son influence pathogénique la formation de cellules embryonnaires et de cellules géantes qui, en se fusionnant, constituent le premier rudiment du tubercule, « les follicules tuberculeux » qui, en se réunissant, constituent le tubercule miliaire.

Le parenchyme pulmonaire est encore sain et présente tout au plus un léger état congestif.

En résumé donc, à cette période, on trouve disséminés dans le sommet du poumon, ici des cellules embryonnaires et des cellules géantes, là des follicules des tuberculeux et des tubercules disséminés dans un parenchyme à peine altéré.

Les symptômes de cette période sont :

De l'essoufflement, de la toux, de la fièvre, de l'anémie et de l'hypocondrie.

L'anémie doit tout particulièrement appeler l'attention de l'observateur.

L'auscultation permet de découvrir trois modes de respiration :

La respiration faible (respiration anomale par modification dans la force).

La respiration saccadée (modification dans le rythme).

La respiration rude (modification dans la douceur).

Qu'est-ce qu'une respiration anomale? C'est une respiration dans laquelle le murmure vésiculaire est modifié, altéré, sans être détruit.

Pour éclairer le diagnostic si difficile de cette affection, voyons ensemble dans quelles maladies de l'appareil respiratoire on peut constater ces signes.

A. La respiration faible, lorsqu'elle existe comme signe unique, peut s'entendre :

1° Lorsqu'il existe une symphyse ou adhérence pleuro-pulmonaire sans épaississement de la plèvre;

2° Dans la congestion pulmonaire légère;

3° Dans certaines oblitérations et compressions bronchiques.

Voici la relation d'une autopsie, d'après Barth et H. Roger, qui démontre l'importance de ce symptôme :

Un jeune homme de 17 ans offrait des symptômes généraux de tuberculose. Les régions sous-claviculaires et sus-épineuse gauches étaient mates à la percussion, et dans ces mêmes points le bruit respiratoire était presque nul. On pouvait difficilement admettre soit un épanchement circonscrit au sommet, à cause de la rareté de cette disposition du liquide, soit des tubercules crus avec augmentation de la densité du parenchyme, ces conditions morbides se traduisant plutôt par la respiration rude ou bronchique.

On diagnostiqua un rétrécissement de la bronche qui se distribue au sommet du poumon gauche. Le malade mourut huit jours après d'hémoptysie foudroyante, et à l'autopsie on trouva cette bronche comprimée par de gros ganglions tuberculeux; les parois étaient froncées au point que le diamètre, à l'origine de la bronche, égalait à peine celui d'une plume à écrire.

B. La respiration saccadée est considérée par beaucoup d'auteurs comme un des signes les plus certains de la tuberculose

débutante. Peter va même jusqu'à dire qu'il est le plus important de tous.

La respiration saccadée peut s'entendre : *a*) dans les affections de la plèvre. Ainsi, lorsqu'il existe une adhérence pleurale en voie de formation, celle-ci gêne les glissements du poumon et peut déterminer aux deux temps de la respiration des secousses de déplissement qui se traduisent par une respiration saccadée; *b*) dans certaines compressions et oblitérations bronchiques; *c*) d'après Potain, beaucoup de respirations saccadées seraient d'origine cardiaque. Celles-ci se distinguent des saccades d'origine pulmonaire, parce qu'elles s'entendent surtout dans l'inspiration quand la lame pulmonaire vient au contact des gros vaisseaux.

Voici la relation d'une autopsie faite par Bourgade et qui démontre l'importance de la respiration saccadée au début de la tuberculose.

Il s'agit d'un phtisique atteint de tuberculose pulmonaire bilatérale. Il existe une caverne, avec ses signes classiques, au sommet gauche. On constate au sommet droit une respiration saccadée. En ce dernier point, il n'y avait aucune adhérence pleurale ni aucune trace de pleurésie récente ou ancienne, mais bien de nombreux tubercules que l'on accusa d'avoir produit l'anomalie respiratoire constatée pendant la vie.

C. La respiration rude, fixe et localisée dans le creux sous-claviculaire, tout en étant un signe important de la période que nous avons en vue, peut se rencontrer également :

1° Dans la bronchite des petites bronches au début et comme reliquat de bronchites anciennes;

2° Dans la congestion pulmonaire.

Comment établir le diagnostic ?

La respiration rude, existant des deux côtés et dans une grande partie de la poitrine, nous fera penser à une bronchite; existe-t-elle à la base, nous songerons à un reste de bronchite ancienne; enfin survient-elle dans le cours d'une fièvre typhoïde, par exemple, il s'agira d'une congestion pulmonaire due à l'affection principale. Par contre, si cette respiration rude existe au som-

met, nous songerons à une congestion ou à une bronchite de cette région. Or, ces deux états pathologiques étant presque toujours d'origine tuberculeuse, nous serons sûrement guidés pour le diagnostic.

Aucun des signes que nous venons d'énumérer n'est donc pathognomonique. Mais s'ils se compliquent d'influence héréditaire, ou si le malade se trouve exposé à la contagion par cohabitation ou autrement; si l'état général est mauvais; si les symptômes observés sont fixes; enfin si les signes observés se localisent particulièrement au sommet, ils acquièrent une importance beaucoup plus grande.

Comment se fait-il que l'inspiration rude puisse déceler la présence de tubercules discrets disséminés dans un parenchyme à peine modifié ? Reindfleisch a démontré que les tubercules discrets apparaissent de préférence dans le vestibule de la bronchiole acineuse là où, d'après Bondel et Chauveau, se formerait le bruit vésiculaire. La présence de ces produits pathologiques modifierait la lumière de ces canaux et transformerait le murmure vésiculaire en une inspiration rude et grave.

En résumé, dans les conditions ci-dessus énumérées, la respiration faible, la respiration saccadée et l'inspiration rude, fixe et localisée au sommet du poumon constituent des signes sérieux qui peuvent nous faire soupçonner et souvent même doivent nous faire diagnostiquer la période de germination de la tuberculose.

Je n'ai pas beaucoup d'observations personnelles à vous citer à l'appui de cette affirmation. Voici cependant deux cas intéressants :

1° Il s'agit d'un jeune garçon de 14 ans, grand, élancé, maigre et anémique; sa mère est morte de tuberculose. Il contracte ce que son entourage appelle un froid et présente de la fièvre, un peu de toux et une expectoration peu abondante. A la percussion, rien d'anormal. A l'auscultation, on constate des râles sibilants et ronflants des deux côtés. Sous la clavicule droite, l'inspiration est rude et ce caractère se représente à différents examens. Au bout de quelques jours le jeune homme sort, apparemment guéri. Mais il contracte un nouveau froid, et l'examen permet

alors de constater des râles crépitants, de la fièvre et des bacilles.

2° Une jeune fille anémique est issue de parents bien portants, mais elle a plusieurs frères morts tuberculeux. Elle est atteinte de pharyngite granuleuse, de gastrite, et elle tousse. A l'auscultation, l'inspiration est rude et localisée au sommet droit. Après quelque temps de traitement, la jeune fille paraît guérie, mais bientôt une hémoptysie survient et tout le tableau de la tuberculose se déroule.

M. Grancher a publié l'observation d'une malade qui était entrée dans son service sans présenter aucun symptôme apparent de tuberculose : ni toux, ni crachats, ni antécédents héréditaires. Cependant à l'auscultation, sous la clavicule gauche, on percevait une inspiration rude et grave, sans modification du son ni des vibrations vocales, sans bruits adventices.

La persistance de ces signes décida l'observateur à affirmer l'existence de la tuberculose. La malade quitta l'hôpital en conservant cette inspiration rude sous-claviculaire. Six mois plus tard, elle y rentra, atteinte d'une toux qui persistait depuis plusieurs semaines. Elle avait eu une hémoptysie assez abondante et plusieurs petits crachements de sang. Elle était amaigrie, avait de la fièvre, mais ne présentait pas d'autres signes que ceux que l'on avait constatés six mois auparavant, à part une rudesse inspiratoire plus manifeste.

Quelques jours après, elle quitta de nouveau l'hôpital pour y rentrer quelques semaines plus tard, et cette fois avec des signes évidents de tuberculose confirmée, s'étendant même au côté opposé.

Le Dr Regal rapporte qu'un jeune homme robuste avait été atteint d'une hémoptysie peu abondante et qui fut promptement arrêtée. Il n'avait aucun antécédent, ni héréditaire, ni personnel. Sa santé avait toujours été bonne. Mais l'auscultation permettait de découvrir une respiration faible dans la fosse sus-épineuse gauche, et une inspiration rude sous la clavicule gauche. Ce dernier symptôme était peu prononcé, sans doute, mais il devenait manifeste quand on comparait le côté gauche avec le côté droit. Telles étaient les seules bases du diagnostic. Trois semaines plus tard, un éminent médecin, consulté par le jeune

homme, déclara que le diagnostic de Regal était exagéré, et il ajouta que le crachement de sang serait significatif si l'on découvrait quelque lésion du côté de la poitrine; mais que cette dernière, au contraire, paraissait tout à fait saine.

Regal, consulté de nouveau, refit son examen et, constatant les mêmes symptômes que la première fois, déclara s'en tenir à son diagnostic.

Quelques mois après ce jeune homme, confiant dans la parole de son second médecin, se maria. Mais il eut bientôt des hémoptysies et ne tarda pas à succomber avec tous les symptômes de la tuberculose.

Voici enfin une observation de Guéneau de Mussy : Un homme de 60 ans se plaint depuis deux mois d'une douleur siégeant dans le côté droit. Il n'a pas de toux, pas d'expectoration, pas de fièvre, pas de sueurs. Mais il est légèrement oppressé, n'a pas d'appétit, est amaigri, faible, et son aspect fait croire à l'existence d'un cancer.

L'examen de la poitrine révèle d'abord une rétraction du thorax à droite et une immobilité de fausses côtes de ce côté pendant l'inspiration. A gauche, au contraire, les mouvements thoraciques sont bien développés.

La percussion dénote une tonalité un peu aiguë sous la clavicule droite et un son un peu obscur à la percussion profonde, en arrière et du même côté.

A gauche, partout le son est un peu tympanique, qualité due à un amincissement extrême des parois thoraciques. Les vibrations sont conservées. Le murmure respiratoire offre un peu de rudesse. L'examen de l'abdomen est négatif.

En présence de cet état de cachexie si profonde et des signes négatifs fournis par les cavités splanchniques, Guéneau de Mussy persista dans la pensée qu'il y avait sous ce trouble grave de la nutrition une affection cancéreuse ou tuberculeuse, opinant toutefois plutôt pour la première que pour la seconde.

Plusieurs mois après, le malade succomba brusquement à des phénomènes cérébraux d'ordre comateux. L'autopsie fit découvrir une pleurésie adhésive costo-diaphragmatique à droite et des granulations tuberculeuses grises dans le poumon droit. Dans

le poumon gauche, les productions morbides occupaient une étendue moindre. Les granulations étaient surtout localisées au sommet et dans la partie moyenne, où elles formaient par leur réunion une masse centrale de 3 centimètres de diamètre. Quelques granulations étaient disséminées dans le reste du poumon, dans un tissu parfaitement sain.

Dans le lobe frontal gauche du cerveau il y avait un amas tuberculeux, cause directe de la mort.

La respiration rude à gauche rendait donc bien compte des lésions qui existaient dans le poumon de ce côté.

Pronostic. — Peter dit que tout porteur de tubercules est loin d'être un phtisique. Laënnec estime que très probablement aucun phtisique ne succombe à la première attaque de l'affection tuberculeuse.

Brouardel, se basant sur de nombreuses autopsies d'individus ayant succombé à une mort violente, dit que chez l'adulte au-dessus de 30 ans les tubercules crétacés (guéris) se rencontrent au sommet du poumon dans la proportion de 60 °/₀. Or, nous venons de le dire, il s'agit d'individus qui n'ont point succombé à la tuberculose.

Nous connaissons tous, d'ailleurs, des faits de guérison de tuberculose localisée, osseuse ou ganglionnaire.

La tuberculose est donc curable, et j'estime que nous devons nous attacher d'une façon toute particulière à diagnostiquer cette terrible affection à l'époque où nous pouvons encore la combattre avec avantage; sans faire de miracle. N'attendons pas que nous ayons découvert la sous-matité et la bronchophonie, l'augmentation des vibrations vocales, les craquements, car ces craquements sont déjà les signes de l'écroulement et de la ruine de l'édifice pulmonaire.

Traitement. — La curabilité de la tuberculose, particulièrement dans la période germinative, étant démontrée, le traitement présente une grande importance et comprend une médication locale et une médication générale que nous aborderons dans une prochaine étude.

MÉMOIRE

SUR LA

RECHERCHE LA PLUS GÉNÉRALE

D'UN

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

PAR

M. le Vte de SALVERT

Professeur à l'Université catholique de Lille.

CHAPITRE III.

Équations générales aux dérivées partielles d'un système orthogonal triplement isotherme. — Solution détaillée du problème pour tous les cas particuliers, qui admettent des surfaces développables dans la composition du système.

Équations aux dérivées partielles, d'après Lamé, d'un système orthogonal quelconque. — Si l'on demande d'écrire d'une façon générale les relations différentielles auxquelles devront satisfaire les paramètres φ, ψ, ϖ des trois familles de surfaces composant un système orthogonal triplement isotherme, l'idée la plus naturelle et qui se présente la première à l'esprit consiste évidemment à astreindre ces trois fonctions à vérifier simultanément

les six équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}=0, & \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x}+\frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y}+\frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z}=0, \\ \frac{\psi^2}{x^2}+\frac{\psi^2}{y^2}+\frac{\psi^2}{z^2}=0, & \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x}+\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y}+\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z}=0, \\ \frac{\varpi^2}{x^2}+\frac{\varpi^2}{y^2}+\frac{\varpi^2}{z^2}=0, & \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x}+\frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z}=0, \end{array} \right.$$

dont les trois du second ordre expriment que chaque famille de surfaces est individuellement isotherme, et les trois autres du premier ordre, que ces mêmes familles sont deux à deux orthogonales entre elles. Mais, s'il est ainsi très simple et très facile de poser les équations du problème, il n'en est pas de même pour le résoudre, c'est-à-dire pour intégrer d'une façon générale le système de ces six équations aux dérivées partielles, à cause de la difficulté de déterminer les deux fonctions arbitraires, introduites par l'intégrale générale de chacune des équations du second ordre (*), par la condition de satisfaire ensuite simultanément aux trois équations du premier ordre. Aussi n'emprunterons-nous cette voie que pour deux sur sept des Cas successivement traités dans cette étude, et encore dans ces deux Cas comme second mode de solution seulement, la question ayant été déjà complètement résolue par un autre mode que nous allons dire.

C'est en faisant appel à une série de considérations en apparence beaucoup plus compliquées, mais qui se prêtent mieux en fait à la réalisation pratique des calculs, que Lamé a posé le premier, d'une façon précise et complète, les équations différentielles du problème, dans des conditions qui permettent d'en espérer la solution avec les ressources actuelles de l'Analyse, lesquelles n'offrent encore aucune méthode certaine pour l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles entre plusieurs inconnues Il faut dire toutefois qu'après avoir ainsi

(*) Voir notre Chapitre II, équation (45).

posé le problème d'une façon magistrale, Lamé ne fait guère dans ses *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes* qu'en ébaucher la solution, mais cette esquisse hardie, si peu justifiée en apparence, et qui semble ne devoir fournir qu'une solution très particulière du problème, lui suffit, grâce à son admirable coup d'œil, pour amener au jour, comme par un prodigieux coup de filet, tout ce que la solution la plus générale contient en réalité d'essentiel, en sorte qu'il ne laisse plus à ceux qui viendront à sa suite que le rôle peu glorieux de constater avec certitude qu'il a déjà tout trouvé, et qu'il ne reste rien désormais à glaner après lui.

Nous allons, en conséquence, rapporter ici fidèlement, mais en le transcrivant avec nos notations, et l'établissant à l'aide de nos travaux antérieurs, le système d'équations aux dérivées partielles, dont Lamé fait ainsi dépendre la détermination de tout système orthogonal triplement isotherme; et après avoir posé de la sorte la question avec lui, nous la résoudrons complètement et rigoureusement, dans les termes mêmes où il l'a posée, et sans sortir un seul instant de la voie qu'il nous aura tracée.

Envisageant donc tout d'abord le problème de la recherche d'un système triple orthogonal dans toute sa généralité, Lamé commence par renverser en quelque sorte les données analytiques du problème, en adoptant pour variables indépendantes les coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ, qui dans les équations précédentes (1) étaient les inconnues, et pour inconnues finales les coordonnées rectilignes x, y, z, qui tout à l'heure étaient les variables indépendantes. Puis il décompose la question en deux distinctes, de façon à parvenir au but en deux étapes successives. — Dans la première, à laquelle correspondra notre Chapitre IV en entier, il se propose d'abord de déterminer les invariants différentiels du premier ordre relatifs aux trois coordonnées curvilignes, $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, en fonction de ces coordonnées φ, ψ, ϖ, elles-mêmes. — Puis, ce premier résultat supposé obtenu, il se propose dans la seconde, comme nous le ferons dans notre Chapitre V, de déterminer les inconnues x, y, z,

en fonction des mêmes variables indépendantes φ, ψ, ϖ, à l'aide des expressions précédemment acquises des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$.

A cet effet, Lamé montre, en premier lieu, qu'il existe dans tout système orthogonal en général six relations différentielles du second ordre entre les trois invariants précités exclusivement, c'est-à-dire six relations dans lesquelles il n'entre que ces seules quantités et leurs dérivées par rapport aux coordonnées φ, ψ, ϖ, à l'exclusion de ces coordonnées elle-mêmes (*). Puis un peu plus loin, en introduisant dans ces relations, et dans celles que l'on peut en déduire par simple combinaison algébrique, à la place des dérivées premières de ces quantités, les grandeurs des six courbures principales du système qui leur sont proportionnelles, il en tire ainsi pareil nombre de relations différentielles du premier ordre entre ces mêmes éléments, relations qu'il traduit alors géométriquement par une série de beaux théorèmes, relatifs aux courbures principales de tout système orthogonal (**).

Ayant démontré tout au long ces théorèmes, c'est-à-dire en fait les formules dont ils ne sont que la traduction en langage ordinaire, dans notre précédent ***Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*** (***) (§ IV, page 88), nous n'aurons plus évidemment, pour retrouver les équations primitives de Lamé, qu'à faire dans ces formules la substitution inverse de celle opérée par Lamé, comme nous venons de le dire, c'est-à-dire de rétablir, par exemple dans les équations (68) (page 80) dudit Mémoire (dont celles qui suivent ne sont que de simples combinaisons algébriques), à la place des six courbures principales $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R'_1}$, $\frac{1}{R'_2}$, $\frac{1}{R''_1}$, $\frac{1}{R''_2}$, les valeurs que nous donnons sous le numéro (59) (page 70) dans le Mémoire en question, savoir (IV):

(*) *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, Ve leçon, §§ XLIII-XLV, pp. 73-79.

(**) *Ibid.*, à la suite, §§ XLVI-XLVII, pp. 79-84.

(***) *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Ve année (1880-1881).

(IV) Ce sont les formules (24) du § XXX, de l'ouvrage déjà cité de Lamé (page 51).

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{1}{R_1}=-\Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_1}=-\Delta_1\psi\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_1}=-\Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi},\\[2ex] \dfrac{1}{R_2}=-\Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_2}=-\Delta_1\psi\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_2}=-\Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}.\end{array}\right.$$

A cet effet, faisant donc cette substitution dans les trois groupes de formules (67) (page 80), et remarquant que les deux quantités P et Q″, définies par ces formules, donneront ainsi naissance à deux expressions identiques, car l'on trouvera de la sorte

$$\left\{\begin{aligned}P &= -\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\right)+\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\left(\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}-\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\right)\\ &= -\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi\left[\frac{(l\Delta_1\psi)^2}{\varpi\varphi}+\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}+\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}-\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\right],\\ Q'' &= -\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right)+\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\left(\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}-\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\right)\\ &= -\Delta_1\varphi\Delta_1\varpi\left[\frac{(l\Delta_1\psi)^2}{\varphi\varpi}+\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}+\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}-\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right],\end{aligned}\right.$$

on s'assure ainsi que les trois quantités Q, Q′, Q″ reproduiront, dans un autre ordre seulement, les mêmes expressions déjà fournies par les trois quantités P, P′, P″; et par conséquent, en supposant que l'on agisse de même à l'égard des trois autres quantités T, T′, T″, on voit que les neuf équations (68) du Mémoire en question (page 82) fourniront par cette substitutions seulement les six équations suivantes :

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{(l\Delta_1\varphi)^2}{\psi\varpi}+\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}+\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}-\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}=0,\\ &\frac{(l\Delta_1\psi)^2}{\varpi\varphi}+\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}+\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}-\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}=0,\\ &\frac{(l\Delta_1\varpi)^2}{\varphi\psi}+\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}+\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}-\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}=0,\end{aligned}\right.$$

(*)

$$
(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1\psi\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\right)+\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right)\\
&\qquad=\Delta_1^2\psi\left(\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right)^2+\Delta_1^2\rho\,\frac{l\Delta_1\psi}{\rho}\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\rho},\\
&\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\rho}{\varpi}\right)+\Delta_1\rho\frac{d}{d\rho}\left(\Delta_1\rho\frac{l\Delta_1\varpi}{\rho}\right)\\
&\qquad=\Delta_1^2\varpi\left(\frac{l\Delta_1\rho}{\varpi}\right)^2+\Delta_1^2\rho\left(\frac{l\Delta_1\varpi}{\rho}\right)^2+\Delta_1^2\psi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\,\frac{l\Delta_1\rho}{\psi},\\
&\Delta_1\rho\frac{d}{d\rho}\left(\Delta_1\rho\frac{l\Delta_1\psi}{\rho}\right)+\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1\psi\frac{l\Delta_1\rho}{\psi}\right)\\
&\qquad=\Delta_1^2\rho\left(\frac{l\Delta_1\psi}{\rho}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{l\Delta_1\rho}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\,\frac{l\Delta_1\rho}{\varpi}\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi},
\end{aligned}\right.
$$

équations simultanées aux dérivées partielles du second ordre, qui constituent, d'après Lamé, le point de départ essentiel de cette recherche.

Les expressions en φ, ψ, ϖ des trois fonctions $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ étant supposées connues par l'intégration générale du système qui précède, on aura ensuite, pour déterminer celles des trois coordonnées x, y, z en fonction des mêmes variables, un système analogue de six équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui ne sont autres que les six relations connues entre les neuf cosinus directeurs des trois normales aux surfaces coordonnées, exprimés également en fonction des coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ; car, si l'on se rapporte au tableau (18), que nous donnons de ces expressions dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 19), on voit que ces relations s'exprimeront alors par les six équations suivantes :

(*) Le premier de ces deux groupes de trois équations représente les équations (8) du § XLIII de Lamé (*Coord. Curv.*, p. 76, au bas), et le second traduit semblablement dans nos notations les trois équations (9) du § XLIV (*ibid.*, p. 78).

(*)

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_{1\varphi}^{2}\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{2}+\Delta_{1\psi}^{2}\left(\frac{x}{\psi}\right)^{2}+\Delta_{1\varpi}^{2}\left(\frac{x}{\varpi}\right)^{2}=1, & \Delta_{1\varphi}^{2}\frac{y}{\varphi}\frac{z}{\varphi}+\Delta_{1\psi}^{2}\frac{y}{\psi}\frac{z}{\psi}+\Delta_{1\varpi}^{2}\frac{y}{\varpi}\frac{z}{\varpi}=0,\\ \Delta_{1\varphi}^{2}\left(\frac{y}{\varphi}\right)^{2}+\Delta_{1\psi}^{2}\left(\frac{y}{\psi}\right)^{2}+\Delta_{1\varpi}^{2}\left(\frac{y}{\varpi}\right)^{2}=1, & \Delta_{1\varphi}^{2}\frac{z}{\varphi}\frac{x}{\varphi}+\Delta_{1\psi}^{2}\frac{z}{\psi}\frac{x}{\psi}+\Delta_{1\varpi}^{2}\frac{z}{\varpi}\frac{x}{\varpi}=0,\\ \Delta_{1\varphi}^{2}\left(\frac{z}{\varphi}\right)^{2}+\Delta_{1\psi}^{2}\left(\frac{z}{\psi}\right)^{2}+\Delta_{1\varpi}^{2}\left(\frac{z}{\varpi}\right)^{2}=1, & \Delta_{1\varphi}^{2}\frac{x}{\varphi}\frac{y}{\varphi}+\Delta_{1\psi}^{2}\frac{x}{\psi}\frac{y}{\psi}+\Delta_{1\varpi}^{2}\frac{x}{\varpi}\frac{y}{\varpi}=0,\end{array}\right.$$

chaque coordonnée rectiligne devant ainsi vérifier isolément l'une des équations du premier ordre non linéaire du groupe de gauche, et les trois coordonnées simultanément le système formé par les trois équations du groupe de droite.

Telles sont donc, si l'on adopte pour variables indépendantes les coordonnées curvilignes elles-mêmes, les équations dont dépendra la détermination d'un système orthogonal en général.

Équations analogues de tout système orthogonal triplement isotherme. — La question se simplifiera notablement, par deux côtés à la fois, dans l'hypothèse particulière du système triplement isotherme, qui fait seule l'objet du présent Mémoire.

En effet, en premier lieu, les trois équations du premier groupe (3) se réduiront alors au premier ordre seulement, car, ayant établi à la fin du § IV du *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* déjà cité tout à l'heure (pp. 89-97) les formules et les théorèmes relatifs à ce cas important, nous avons vu alors qu'en convenant expressément de prendre pour φ, ψ, ϖ les coordonnées thermométriques elles-mêmes, c'est-à-dire les paramètres thermométriques des trois familles de surfaces, on peut, pour cette hypothèse, remplacer, soit la première, soit la seconde colonne des équations (68) précitées (page 80), par les trois équations (86) ou (89), c'est-à-dire par celles-ci :

(*) D'après la formule (2) de notre Chapitre I, les trois équations de gauche expriment encore pour chaque coordonnée rectiligne $u=x, y, z$, l'identité de définition $\Delta_1^2 u = 1$, et reproduisent les équations (29) du § L de Lamé (*loc. cit.*, p. 90, en haut). — Les deux groupes ensemble équivalent d'ailleurs aux équations (5) du § VI (*ibid.*, p. 10).

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{R'_1R''_1}+\frac{1}{R'_2R''_2}&=\frac{1}{R''_1R'_2},\\ \frac{1}{R''_1R_1}+\frac{1}{R''_2R_2}&=\frac{1}{R_1R''_2},\\ \frac{1}{R_1R'_1}+\frac{1}{R_2R'_2}&=\frac{1}{R'_1R_2},\end{aligned}\right.$$

équations que n'indique pas Lamé, et qui, contenant les courbures principales en termes finis seulement, fourniront par conséquent, par la même substitution que tout à l'heure, c'est-à-dire celle des valeurs (2), trois équations du premier ordre entre les invariants Δ_1 relatifs aux trois coordonnées φ, ψ, ϖ.

En second lieu, avec le même choix de coordonnées curvilignes, il résulte immédiatement des expressions (6) que nous avons données d'après Lamé dans notre Chapitre I, que les trois conditions qui exprimeront l'isothermie de nos trois familles de surfaces se traduiront, avec cette hypothèse, par les trois équations

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)=0,\qquad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\right)=0,\qquad \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right)=0,$$

et que dès lors, si l'on adopte pour inconnues intermédiaires, à la place de $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, les trois quantités

$$(7)\qquad P=\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi},\qquad Q=\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi},\qquad R=\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi},$$

les trois conditions qui précèdent se changeront alors dans les suivantes

$$(8)\qquad \frac{dP}{d\varphi}=0,\qquad \frac{dQ}{d\psi}=0,\qquad \frac{dR}{d\varpi}=0,$$

qui équivalent à admettre pour P, Q, R des valeurs de la forme

$$(9)\qquad P=f_1(\psi,\varpi),\qquad Q=f_2(\varpi,\varphi),\qquad R=f_3(\varphi,\psi).$$

On voit donc que chacune des inconnues P, Q, R, ou f_1, f_2, f_3,

ne dépendra plus que de deux variables seulement, et cette circonstance introduira certainement dans les calculs une facilité sur laquelle on n'avait pas à compter dans le cas général, avec le système d'équations précédent (3) et (4), et dont on n'eût pas bénéficié, même pour l'hypothèse particulière actuelle, avec le système primitivement considéré (1).

C'est en effet principalement cette disparition de l'une des variables indépendantes dans l'expression de chaque inconnue avec le choix d'inconnues (7) qui constitue, pour le cas du système triplement isotherme, la supériorité du système d'équations posé par Lamé d'après ces données, et que nous allons maintenant former, sur le système primordial (1), en apparence beaucoup plus simple et plus naturel, attendu que de cette première simplification ressortira bientôt, comme nous le verrons, une seconde plus caractérisée encore, consistant en ce que, dans le système des trois équations du second ordre (4), il n'entrera plus comme inconnues que des fonctions d'une seule variable seulement, en sorte que leur intégration se ramènera à celle d'équations différentielles ordinaires, autre avantage important que n'aurait point présenté le système d'équations primitif (1).

Cela dit, voyons comment on déterminera les trois fonctions P, Q, R, que Lamé substitue ainsi comme inconnues aux trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, et ces expressions supposées obtenues, comment on parviendra ensuite à celle des trois coordonnées x, y, z elles-mêmes.

A cet effet, multipliant entre elles deux à deux successivement les trois équations de définition (7), et obtenant ainsi pour les trois quantités que nous avons appelées H, K, J, dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (Chapitre I, équat. (8), page 14, *en bas*)

$$(10) \qquad H = \Delta_1^{-2}\varphi = QR, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = RP, \qquad J = \Delta_1^{-2}\varpi = PQ,$$

d'où nous déduirons par conséquent

$$
(11)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\Delta_1\varphi = (QR)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{QR}}, \quad \Delta_1\psi = (RP)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{RP}}, \quad \Delta_1\varpi = (PQ)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{PQ}} \\
l\Delta_1\varphi = -\dfrac{1}{2}(lQ + lR), \quad l\Delta_1\psi = -\dfrac{1}{2}(lR + lP), \quad l\Delta_1\varpi = -\dfrac{1}{2}(lP + lQ),
\end{array}
\right.
$$

nous obtiendrons tout d'abord, en substituant dans le tableau précédent (2), et ayant égard aux trois conditions (8), pour les six courbes principales, les nouvelles expressions

$$
(12)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{2\sqrt{QR}}\,\dfrac{lR}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_1} = \dfrac{1}{2\sqrt{RP}}\,\dfrac{lP}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_1} = \dfrac{1}{2\sqrt{PQ}}\,\dfrac{lQ}{\varpi} \\
\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{2\sqrt{QR}}\,\dfrac{lQ}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_2} = \dfrac{1}{2\sqrt{RP}}\,\dfrac{lR}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_2} = \dfrac{1}{2\sqrt{PQ}}\,\dfrac{lP}{\varpi}
\end{array}
\right.
$$

que nous remettrons semblablement dans nos trois équations ci-dessus (6), spéciales à l'hypothèse particulière actuelle. Or, la première de ces équations devenant par cette substitution

$$
\frac{1}{4P\sqrt{QR}}\left(\frac{1}{P}\,\frac{P}{\psi}\cdot\frac{1}{Q}\,\frac{Q}{\varpi} + \frac{1}{R}\,\frac{R}{\psi}\cdot\frac{1}{P}\,\frac{P}{\varpi}\right) = \frac{1}{4P\sqrt{QR}}\cdot\frac{1}{Q}\,\frac{Q}{\varpi}\cdot\frac{1}{R}\,\frac{R}{\psi},
$$

ou, ce qui est la même chose, en multipliant par le produit $4P^2(QR)^{\frac{3}{2}}$ qui ne saurait être nul que pour des points exceptionnels seulement (chacune des quantités $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, dont les racines carrées forment les numérateurs des quantités (7), étant par définition une somme de trois carrés),

$$
R\,\frac{P}{\psi}\,\frac{Q}{\varpi} + Q\,\frac{R}{\psi}\,\frac{P}{\varpi} = P\,\frac{Q}{\varpi}\,\frac{R}{\psi},
$$

puis intervertissant enfin les deux membres, on voit que nous aurons dans l'hypothèse actuelle, à la place des trois équations du second ordre (3) relatives au cas général, les trois autres du premier ordre

$$
(13)\qquad \left\{ \begin{aligned}
&P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi} = Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi} + R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi},\\
&Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi} = R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi},\\
&R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi} = P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} + Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}.
\end{aligned} \right. \quad (*)
$$

Avant de passer au second groupe, notons à propos de celui-ci deux observations, dont la première seule est signalée par Lamé : à savoir, en premier lieu, que si l'on représente pour un instant par $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$ ces trois dernières équations, on aura *identiquement*

$$
(14)\qquad \mathcal{A}\frac{l.QR}{\varphi} + \mathcal{B}\frac{l.RP}{\psi} + \mathcal{C}\frac{l.PQ}{\varpi} = 3\left(\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} + \frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}\right),
$$

d'où il suit immédiatement que l'équation

$$
(15)\qquad \frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} + \frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} = 0, \quad (**)
$$

qui est une simple conséquence algébrique des trois équations (13), pourra être envisagée à la place de l'une d'elles; et, en second lieu, que ces trois mêmes équations ne sont pas distinctes entre elles, et se réduisent en réalité à deux seulement, attendu qu'il est facile de vérifier l'*identité*

$$
(16)\qquad \mathcal{A}\frac{lR}{\varphi} + \mathcal{B}\left(\frac{lR}{\psi} - \frac{lP}{\psi}\right) - \mathcal{C}\frac{lP}{\varpi} = 0. \quad (***)
$$

Ces deux équations se réduisant ainsi en fait à deux seulement, on pourra prendre, si l'on veut, pour ces deux distinctes,

---

(*) Ces trois équations sont celles du type (13), § LVI, dont Lamé n'écrit que la première seulement (*Coord. Curv.*. p. 99).

(**) C'est l'équation (10) du § LV (*ibid.*, page 99, *en haut*).

(***) En effet, on aura d'après la définition des expressions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, pour la première égalité (14), d'une part,

en vue de conserver la symétrie, d'une part l'équation qui précède (15), et d'autre part la combinaison $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0$, c'est-à-dire l'équation

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} & P\left(\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} + \frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} - \frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right) + Q\left(\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi} + \frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi} - \frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right) \\ & \qquad + R\left(\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + \frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi} - \frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right) = 0. \ (*) \end{aligned} \right.$$

Venons maintenant au second groupe (4), qui est aussi du second ordre, et auquel nous n'aurons d'autre modification à faire subir que d'y introduire les inconnues P, Q, R à la place des inconnues $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$; car les trois équations de la dernière

---

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\frac{l.QR}{\varphi} + \mathcal{B}\frac{l.RP}{\psi} + \mathcal{C}\frac{l.PQ}{\varpi} &= \mathcal{A}\left(\frac{lQ}{\varphi} + \frac{lR}{\varphi}\right) + \mathcal{B}\left(\frac{lR}{\psi} + \frac{lP}{\psi}\right) + \mathcal{C}\left(\frac{lP}{\varpi} + \frac{lQ}{}\right) \\ &= \frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi}\left(Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi} + R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi} - P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right) + \frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\left(Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi} + R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi} - P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right) \\ &\quad + \frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} - Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right) + \frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} - Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right) \\ &\quad + \frac{1}{P}\frac{P}{\varpi}\left(P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} + Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi} - R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right) + \frac{1}{Q}\frac{Q}{\varpi}\left(P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} + Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi} - R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right) \\ &= 3\left(\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} + \frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}\right), \end{aligned}$$

puis semblablement, pour la seconde égalité (16), d'autre part,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}\frac{lR}{\varphi} + \mathcal{B}\left(\frac{lR}{\psi} - \frac{lP}{\psi}\right) - \mathcal{C}\frac{lP}{\varpi} \\ & = \frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\left(Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi} + R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi} - P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right) + \frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} - Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right) \\ & - \frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} - Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right) - \frac{1}{P}\frac{P}{\varpi}\left(P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} + Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi} - R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right) = 0. \end{aligned}$$

(*) Nous eussions pu obtenir également de prime abord ces deux équations (15) et (17) en substituant, comme tout à l'heure, les expressions (12) dans nos deux formules (90) du paragraphe IV de notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure*, etc. (page 95.).

colonne (68) (page 82, *Mémoire sur la Courbure*, etc.) subsistent sans modification pour le cas particulier des trois familles isothermes. Pour cela il n'y aura qu'à remettre simplement dans l'expression (67) (page 80, *ibid.*) de chacune des trois quantités T, T', T'', pour les six courbures principales, les valeurs nouvelles (12) à la place de celles (2) que nous y avions substituées lors du Cas général, et en même temps, à la place de $\Delta_1\varphi, \Delta_1\psi, \Delta_1\varpi$, leurs valeurs (11) en P, Q, R. Or comme, d'une part, ces trois expressions T, T', T'' se déduisent les unes des autres par la permutation des trois surfaces coordonnées, et que d'autre part cette même permutation, opérée sur le tableau (12) des courbures principales, revient à y permuter à la fois les deux groupes (φ, ψ, ϖ) et (P, Q, R), il est clair qu'il suffira de former la première des équations demandées seulement, et que les deux autres s'en déduiront ensuite par la double permutation que nous venons de dire.

A cet effet, ayant pour le premier terme de la quantité T précitée, en ayant égard aux valeurs (11) et (12),

$$\Delta_1\psi \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1}\right)=\frac{1}{\sqrt{RP}}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{2\sqrt{RP}}\frac{lP}{\psi}\right)=\frac{1}{2}(RP)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{d\psi}\left(R^{-\frac{1}{2}}P^{-\frac{3}{2}}.\frac{P}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(RP)^{-\frac{1}{2}}\left(R^{-\frac{1}{2}}P^{-\frac{3}{2}}.\frac{P^2}{\psi^2}-\frac{3}{2}R^{-\frac{1}{2}}P^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{P}{\psi}\right)^2-\frac{1}{2}R^{-\frac{3}{2}}P^{-\frac{3}{2}}\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2R^{-1}P^{-2}.\frac{P^2}{\psi^2}-3R^{-1}P^{-3}\left(\frac{P}{\psi}\right)^2-R^{-2}P^{-2}\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{4}R^{-2}P^{-3}\left(2RP\frac{P^2}{\psi^2}-3R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2-P\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}\right),$$

puis remarquant que le second terme de cette même expression T se déduit du premier en y changeant simplement ψ en ϖ, et $\frac{1}{R_1'}$ en $\frac{1}{R_2''}$, c'est-à-dire, d'après les valeurs (12), en permutant seulement ψ et ϖ, et R et Q, nous aurons dès lors pour ce second terme, sans recommencer le calcul,

$$\Delta_1\varpi \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2''}\right)=\frac{1}{4}Q^{-2}P^{-3}\left(2QP\frac{P^2}{\varpi^2}-3Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2-P\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}\right);$$

et par conséquent nous trouverons pour l'expression T précitée (formule (67), page 80, du *Mémoire*), en y remettant à la fois ces deux dernières expressions, ainsi que les valeurs (12),

$$T = \Delta_1\psi\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R'_1}\right) + \Delta_1\varpi\,\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R''_2}\right) + \left(\frac{1}{R'_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R''_2}\right)^2 + \frac{1}{R_1R_2}$$

$$= \frac{1}{4R^2P^3}\left(2RP\,\frac{P^2}{\psi^2} - 3R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 - P\,\frac{P}{\psi}\,\frac{R}{\psi}\right) + \frac{1}{4Q^2P^3}\left(2QP\,\frac{P^2}{\varpi^2} - 3Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P\,\frac{P}{\varpi}\right.$$

$$+ \frac{1}{4RP}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2 + \frac{1}{4PQ}\left(\frac{lP}{\varpi}\right)^2 + \frac{1}{4QR}\,\frac{lR}{\varphi}\,\frac{lQ}{\varphi}.$$

Par conséquent, en multipliant d'abord par $4P^3Q^2R^2$, l'équation demandée $T = 0$, sera

$$Q^2\left(2RP\,\frac{P^2}{\psi^2} - 3R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 - P\,\frac{P}{\psi}\,\frac{R}{\psi}\right) + R^2\left(2QP\,\frac{P^2}{\varpi^2} - 3Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P\,\frac{P}{\varpi}\,\frac{Q}{\varpi}\right)$$

$$+ Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + QR^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 + P^3\frac{R}{\varphi}\,\frac{Q}{\varphi} = 0,$$

ou, en réduisant, séparant en deux membres, puis enfin ajoutant et retranchant pour la symétrie le terme $P^3\,\frac{R}{\varphi}\,\frac{Q}{\varphi}$,

$$2PQR\left(Q\,\frac{P^2}{\psi^2} + R\,\frac{P^2}{\varpi^2}\right) = 2\left(Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + QR^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P^3\,\frac{Q}{\varphi}\,\frac{R}{\varphi}\right)$$

$$+ P\left(P^2\,\frac{Q}{\varphi}\,\frac{R}{\varphi} + Q^2\,\frac{R}{\psi}\,\frac{P}{\psi} + R^2\,\frac{P}{\varpi}\,\frac{Q}{\varpi}\right).$$

Si donc, pour écrire ces équations, nous convenons de représenter par le symbole G l'expression symétrique en φ, ψ, ϖ d'une part, et P, Q, R de l'autre,

$$(18)\qquad G = P^2\,\frac{Q}{\varphi}\,\frac{R}{\varphi} + Q^2\,\frac{R}{\psi}\,\frac{P}{\psi} + R^2\,\frac{P}{\varpi}\,\frac{Q}{\varpi},$$

les trois équations (4) du Cas général seront, pour le problème actuel, les trois suivantes (*) :

$$(19)\quad \begin{cases} 2PQR\left(Q\dfrac{P^2}{\psi^2}+R\dfrac{P^2}{\varpi^2}\right)=2\left(Q^2R\left(\dfrac{P}{\psi}\right)^2+QR^2\left(\dfrac{P}{\varpi}\right)^2-P^3\dfrac{Q}{\varphi}\dfrac{R}{\varphi}\right)+PG,\\ 2PQR\left(R\dfrac{Q^2}{\varpi^2}+P\dfrac{Q^2}{\varphi^2}\right)=2\left(R^2P\left(\dfrac{Q}{\varpi}\right)^2+RP^2\left(\dfrac{Q}{\varphi}\right)^2-Q^3\dfrac{R}{\psi}\dfrac{P}{\psi}\right)+QG,\\ 2PQR\left(P\dfrac{R^2}{\varphi^2}+Q\dfrac{R^2}{\psi^2}\right)=2\left(P^2Q\left(\dfrac{R}{\varphi}\right)^2+PQ^2\left(\dfrac{R}{\psi}\right)^2-R^3\dfrac{P}{\varpi}\dfrac{Q}{\varpi}\right)+RG; \end{cases}$$

et les trois inconnues P, Q, R, qui sont par hypothèse des fonctions de φ, ψ, ϖ de la forme (9), seront déterminées, en conséquence, par la double condition de satisfaire simultanément au système du premier ordre (13) et à ce dernier système du second ordre (19). Nous effectuerons complètement cette détermination dans le Chapitre IV, qui suivra celui-ci.

Les expressions des trois fonctions P, Q, R étant ainsi supposées connues, on en conclura immédiatement par les formules (11) les valeurs en φ, ψ, ϖ des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$; et dès lors, en remettant ces valeurs dans les six équations du premier ordre (5), ces dernières équations feront connaître à leur tour l'expression des trois inconnues x, y, z en fonction des mêmes variables : ce qui revient encore à dire, sous forme plus directe, en multipliant chacune de ces équations par PQR, et ayant alors égard aux formules (10), que les trois inconnues x, y, z seront ensuite déterminées, elles aussi, par la

(*) Lamé ne présente ces équations *elles-mêmes* (c'est-à-dire avant d'y introduire aucun résultat de calculs antérieurs) que sous le type extrêmement complexe (équation (19) du § LVII, *ibid.*, page 101)

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\sqrt{\frac{P}{QR}}\frac{d\sqrt{R}}{d\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\sqrt{\frac{Q}{RP}}\frac{d\sqrt{R}}{d\psi}\right)-\frac{R}{PQ}\frac{d\sqrt{P}}{d\varpi}\frac{d\sqrt{Q}}{d\varpi}=0,$$

qui masque complètement la véritable forme analytique de ces équations, et ne permet même pas d'apprécier le degré de complication ou de facilité nouvelle qu'elles introduisent dans la question.

double condition de satisfaire simultanément aux six équations du premier ordre

$$(20)\quad \begin{cases} P\left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + Q\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + R\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2 = PQR, & P\frac{y}{\varphi}\frac{z}{\varphi} + Q\frac{y}{\psi}\frac{z}{\psi} + R\frac{y}{\varpi}\frac{z}{\varpi} = 0 \\ P\left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + Q\left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + R\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2 = PQR, & P\frac{z}{\varphi}\frac{x}{\varphi} + Q\frac{z}{\psi}\frac{x}{\psi} + R\frac{z}{\varpi}\frac{x}{\varpi} = 0 \\ P\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2 + Q\left(\frac{z}{\psi}\right)^2 + R\left(\frac{z}{\varpi}\right)^2 = PQR, & P\frac{x}{\varphi}\frac{y}{\varphi} + Q\frac{x}{\psi}\frac{y}{\psi} + R\frac{x}{\varpi}\frac{y}{\varpi} = 0 \end{cases}$$

chaque coordonnée rectiligne devant ainsi de nouveau vérifier d'abord isolément une équation aux dérivées partielles, non linéaire du même type, et ensuite, conjointement avec les deux autres, le système formé des trois autres équations de droite. — Nous effectuerons encore cette détermination, de la façon la plus générale, dans le Chapitre V du présent travail.

Simplification de la méthode pour les cas particuliers qui admettent des surfaces développables dans la composition du système. — Nous résoudrons donc ainsi complètement, dans les deux Chapitres qui suivront celui-ci, le problème d'analyse posé par Lamé dans les termes que nous venons de dire, et dont il se borne à écrire pour ainsi dire d'emblée, et comme par une sorte de divination, une solution remarquable, mais sans que rien dans ses raisonnements ni ses calculs permette de penser que cette solution soit réellement la seule, ou seulement la plus générale (*). Mais, comme le point de départ de nos calculs pour le cas le plus général (nous entendons par là celui où l'on n'assigne pas par avance une valeur déterminée à aucune des six dérivées des fonctions P, Q, R) supposera essentiellement

(*) Nous entendons parler expressément ici des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, dont nous avons seul connaissance, quant à la question posée dans les pages qui précèdent. — Nous ne savons en effet à quel ouvrage Lamé fait allusion lorsqu'il dit : « J'ai démontré *depuis* que les valeurs (14) des Q_i^2 (nos fonctions P, Q, R) sont les intégrales *les plus générales* du groupe des trois équations aux différences partielles qu'elles vérifient ». (*Coordonnées Curvilignes*, § LVI, page 100, dernier alinéa).

qu'aucune de ces dérivées n'est constamment égale à zéro, nous serons obligés de traiter à part les cas particuliers où l'on admet cette hypothèse à l'égard de l'une ou de plusieurs de ces dérivées.

Ces cas particuliers seront d'ailleurs nombreux et importants à considérer, car il résulte des expressions (12) que l'hypothèse analytique que nous venons de dire équivaut à admettre que, parmi les courbures principales du système, il s'en trouve une ou plusieurs qui sont constamment nulles, circonstance qui se produira toutes les fois que parmi les trois familles de surfaces coordonnées il entrera des surfaces développables (*), c'est-à-dire notamment des plans, des cônes ou des cylindres, et qui, se trouvant réalisée par conséquent pour chacun des systèmes de coordonnées classiques, tous composés exclusivement de familles isothermes, fera rentrer dès lors ces divers systèmes au nombre des cas particuliers que nous venons de signaler.

Si l'on se reporte, en outre, au second Théorème de Lamé, que nous démontrons dans le Chapitre Ier de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 28-29), on verra encore que ces mêmes cas particuliers seront tous caractérisés par l'une ou l'autre de ces deux circonstances, que deux des normales principales aux trois arcs d'intersection des surfaces coordonnées deux à deux feront entre elles un angle droit, ou bien que l'un de ces arcs d'intersection aura son rayon de courbure constamment infini, et sera par conséquent une droite.

Comme rien ne garantit à l'avance, par ailleurs, que les seuls systèmes classiques représentent la totalité de ces cas particuliers (ni même plus généralement que les plans, les cônes, et les cylindres soient les seules surfaces développables susceptibles de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme), il ne nous est pas permis d'en négliger l'étude, et c'est à cet examen

---

(*) En effet, si l'on se reporte à l'équation classique qui détermine les deux rayons de courbure principaux, ou les deux courbures principales d'une surface quelconque, le produit $\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ de ces deux courbures s'annulant en tous points pour les surfaces qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $rt - s^2 = 0$, on voit que pour toute surface développable, l'une au moins de ces deux courbures sera constamment nulle.

détaillé, auquel ne procèdent ni Lamé ni Betti, dans les ouvrages déjà cités, que nous allons consacrer le restant de ce Chapitre.

A la vérité, trois sur quatre des Cas particuliers les plus importants que nous allons rencontrer sont bien mentionnés et étudiés dans les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, savoir le système sphérique (§§ XXXII-XXXIII, pp. 52-56, et § LIV, p. 96), le système cylindrique (§ XLVIII, pp. 84-86) et le système conique (§ XLIX, pp. 86-88). Mais au lieu de les rencontrer chacun, ainsi que nous allons le faire, comme résultat de l'intégration de ses équations générales, Lamé se contente de vérifier, avant d'entreprendre sa recherche, que ces mêmes systèmes, considérés comme donnés *a priori*, satisfont bien chacun à ces mêmes équations générales, ou, ce qui est la même chose, vérifient bien les formules (ou théorèmes) relatives aux courbures principales du système, qui ne sont que l'expression géométrique des dites équations. Or, nous avons déjà fait observer dans notre Chapitre II (p. 58), à propos du simple problème de l'isothermie que nous avons dû reprendre, pour une raison semblable, à l'aide d'une méthode inverse de celle de Lamé, qu'en adoptant une pareille marche, aucune considération ne permet de penser que ces diverses solutions particulières soient effectivement les seules distinctes du Cas général, non seulement d'une manière collective, mais encore, en décomposant et précisant davantage la question, que chacune d'elles considérée isolément soit la seule solution possible du problème pour les données analytiques spéciales auxquelles elle correspond ; et, par conséquent, les indications précitées de Lamé, utiles et intéressantes en tant que vérification des calculs assez compliqués par lesquels il a établi les dites équations générales, laissent en réalité absolument entière la question de la recherche des cas particuliers du problème, à laquelle nous allons consacrer la fin de la Première Partie de notre travail.

Nous retrouverons ainsi successivement, à très peu près dans l'ordre où nous les avons déjà considérés, les différents systèmes de coordonnées dont nous avons eu occasion de faire usage, dans le troisième Chapitre de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordon-*

nées Curvilignes, pour la détermination des lignes géodésiques des surfaces les plus usuelles, et l'application que nous en avons faite pour cet objet pourrait déjà être invoquée, s'il en était besoin, comme témoignage de l'utilité des nouveaux systèmes que cette étude va ainsi nous révéler, à la suite des trois systèmes de coordonnées classiques, et par conséquent aussi de l'intérêt qu'il y a à savoir d'une façon certaine qu'ils sont réellement les seuls qui puissent être composés exclusivement de familles isothermes.

Pour ces différents Cas que nous venons de spécifier, en vue de profiter de la simplicité plus grande du problème analytique inhérente aux conditions particulières de la question, nous adopterons, pour la seconde étape de la recherche, une marche plus rapide, un peu différente de celle que nous avons exposée tout à l'heure en vue du Cas le plus général, et qui sera uniformément pour tous ces divers cas la suivante.

Ayant commencé encore par faire usage des six équations (13) et (19) pour reconnaître tout d'abord s'il est possible, avec l'hypothèse donnée, que le problème reçoive une solution, et dans l'affirmative pour déterminer en φ, ψ, ϖ les trois fonctions P, Q, R, au lieu de déterminer ensuite, comme tout à l'heure, les trois inconnues définitives x, y, z, par le moyen des six équations (20), nous reconnaîtrons tout d'abord très rapidement, à l'aide du tableau des courbures principales (12) (*), et en invoquant les différents théorèmes que nous avons établis précisément dans cette vue au cours de notre Chapitre II, à quelle catégorie géométrique, plans, cônes, cylindres, sphères, etc.... appartient chacune des trois familles de surfaces coordonnées; et la partie la plus importante de la solution étant ainsi obtenue, le système d'équations corres-

(*) En faisant ainsi intervenir la considération des courbures principales du système pour éclairer notre route et déblayer le terrain dans le problème si compliqué de l'intégration des équations (13), (19), et (20) ou (5), c'est encore l'exemple et les indications de Lamé lui-même que nous suivons, car il adopte à deux reprises cette même considération comme point de départ de ses calculs pour le Cas général, une première fois pour la détermination des fonctions P, Q, R (*Coordonn. Curv.*, §§ LIV-LV, formules (8), page 97), et une seconde fois pour la détermination des inconnues x, y, z elles-mêmes (*Ibid.*, §§ LXI-LXII, formules (32), pp. 110-111).

pondant aux systèmes (5) ou (20) en coordonnées rectilignes, c'est-à-dire en tenant compte des formules (11), les six équations

$$
(21)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 = \frac{1}{QR}, & (^*)\quad \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z} = 0, \\
\left(\frac{\psi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{z}\right)^2 = \frac{1}{RP}, & \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x} + \frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y} + \frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z} = 0, \\
\left(\frac{\varpi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{z}\right)^2 = \frac{1}{PQ}, & \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x} + \frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y} + \frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z} = 0,
\end{array}
\right.
$$

ou encore parfois trois équations de ce dernier système, jointes à trois autres empruntées au système (1) considéré en premier lieu, nous fourniront alors, par des intégrations très faciles, ou même de simples identifications, les expressions en x, y, z des trois fonctions φ, ψ, ϖ, c'est-à-dire alors les équations exactes des trois familles de surfaces coordonnées, équations d'où l'on pourra tirer ensuite, si l'on aime mieux, de même que pour le Cas le plus général, les valeurs en φ, ψ, ϖ des trois coordonnées x, y, z, qu'il est surtout, dans la pratique, intéressant de posséder (**).

La considération des courbures principales du système étant ainsi en quelque sorte la base essentielle de cette nouvelle méthode de recherche, il convient tout d'abord d'arrêter un instant notre attention sur le tableau (12) des expressions de ces courbures.

(*) Si l'on multiplie, en effet, les trois équations de droite respectivement par les produits $\Delta_1^{-1}\psi\Delta_1^{-1}\varpi$, $\Delta_1^{-1}\varpi\Delta_1^{-1}\varphi$, $\Delta_1^{-1}\varphi\Delta_1^{-1}\psi$, ainsi que celles de gauche respectivement par les trois carrés $\Delta_1^{-2}\varphi = QR$, $\Delta_1^{-2}\psi = RP$, $\Delta_1^{-2}\varpi = PQ$, il est visible que ces équations représenteront bien ainsi les six relations entre les cosinus directeurs des trois normales exprimés en coordonnées rectilignes. De plus, telles qu'elles sont, les trois équations de gauche traduisent encore, eu égard aux égalités que nous venons d'écrire, les définitions des symboles $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ dans le même système de coordonnées.

(**) Ce sont en effet ces dernières expressions, et non les précédentes ou les formules inverses, qui permettront, dans le cas où l'on croira y trouver avantage, d'introduire le système de coordonnées curvilignes en question à la place des coordonnées x, y, z, par simple substitution dans un calcul primitivement exprimé en coordonnées rectilignes. Aussi sont-ce ces formules que nous viserons constamment comme but final de notre recherche.

Or, chacune de ces expressions étant proportionnelle à l'une des six dérivées $\frac{P}{\psi}, \frac{P}{\varpi}, \frac{Q}{\varpi}, \frac{Q}{\varphi}, \frac{R}{\varphi}, \frac{R}{\psi}$, on sera amené tout naturellement à classer ces dérivées de différentes manières, suivant qu'on lira ce tableau par lignes horizontales, par lignes verticales, ou de toute autre façon. En vue d'abréger le discours à maintes reprises dans toute la discussion qui va suivre, et d'introduire la clarté dans le raisonnement par la précision du langage, nous ferons usage dorénavant, pour ces dérivées, des dénominations suivantes, calquées, en quelque sorte, sur celles que Lamé attribue aux six courbures principales correspondantes (*).

Nous appellerons *dérivées d'un même groupe* (caractérisé par l'indice 1 ou 2) les trois dérivées des fonctions P, Q, R qui figurent dans une même ligne horizontale de ce tableau, lesquelles sont relatives chacune à une variable indépendante et à une fonction différente; et pour deux dérivées empruntées ainsi chacune à un groupe différent, nous désignerons par le nom de *dérivées conjuguées* celles qui figurent dans une même ligne verticale, et qui, étant relatives à la même variable indépendante, correspondent à la même surface coordonnée, et par celui de *dérivées réciproques*, celles qui, étant relatives à deux variables indépendantes différentes, appartiennent à la même fonction P, Q, R.

Ces dénominations étant admises, la forme simple et remarquable de l'équation (15) nous apprend que, si l'une des dérivées de l'un des groupes est supposée nulle, il y en aura forcément une autre parmi les dérivées de l'autre groupe qui sera nulle également.

Cela posé, si l'on veut être sûr de ne laisser échapper aucune solution, il sera nécessaire d'examiner successivement six Cas distincts, suivant le nombre de ces dérivées que l'on supposera nulles à la fois, le dernier ou le plus général étant celui où l'on

(*) En introduisant ces dénominations, nous ne faisons que transporter aux dérivées elles-mêmes les appellations que Lamé attribue, pour l'énoncé de ses théorèmes, aux courbures principales correspondant à ces mêmes dérivées dans le tableau des expressions (12). Pour la justification de ces dénominations, se reporter en conséquence aux *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, § XXIX (pp. 49-50), et § XLVII (p. 83 *in medio*), ou bien encore à notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (pp. 86 au bas, et 87). (Voir également, un peu plus loin, pour supplément d'explication, la note du Cas III, sous-cas 1°.)

n'admet cette supposition pour aucune d'entre elles. A chacune de ces hypothèses correspondra une solution différente du problème, dont il importe, non seulement de préciser avec soin la signification géométrique, mais encore de délimiter très exactement l'étendue, ce qui ne pourra être fait qu'à l'aide de l'examen attentif et minutieux auquel nous allons maintenant procéder.

SYSTÈMES CLASSIQUES DES COORDONNÉES RECTILIGNES, ET DES COORDONNÉES CYLINDRIQUES DU SECOND ORDRE. — 1° « *Les six dérivées précitées sont nulles à la fois* », c'est-à-dire que l'on a

$$(22)\quad \frac{P}{\psi}=0,\quad \frac{P}{\varpi}=0,\quad \frac{Q}{\varpi}=0,\quad \frac{Q}{\varphi}=0,\quad \frac{R}{\varphi}=0,\quad \frac{R}{\psi}=0.$$

Il est évident que toutes nos équations (13) et (19) sont vérifiées simultanément par ces hypothèses. De plus, les six courbures principales (12) étant alors toutes nulles à la fois, chaque surface coordonnée φ, ψ, ϖ est un plan; et l'on reconnaît dès lors, par une conséquence géométrique presque immédiate, que chacune des trois familles se compose de plans parallèles; car si, considérant deux familles en particulier, et dans chacune d'elles une surface individuelle correspondant à une valeur déterminée du paramètre, ainsi que la droite d'intersection D de ces deux plans, tous les plans composant la troisième famille devront être perpendiculaires à cette même droite D, et par conséquent seront parallèles entre eux.

On parviendrait à la même conclusion par voie analytique, en remarquant que les hypothèses (22), étant jointes aux conditions générales (8), expriment alors que les trois fonctions P, Q, R sont simultanément de simples constantes. Il en est donc de même, d'après les expressions (11), des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$. Or, si l'on se reporte pour chacune des trois familles à l'interprétation géométrique donnée par Lamé (*) de l'invariant ou paramètre différentiel Δ_1, et qu'exprime la formule (40bis) (p. 44) de notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*, en

(*) LAMÉ, *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, § VII, p. 11, *au bas*.

appelant N la longueur de la normale à la surface particulière φ_1 au point (ψ, ϖ) comprise entre cette surface et l'autre surface particulière φ_2, on aura par cette formule

$$(22^{bis}) \quad \frac{dN}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} = C, \qquad \text{d'où} \qquad N = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} C d\varphi = C(\varphi_2 - \varphi_1), \text{(*)}$$

résultat indépendant du point (ψ, ϖ) considéré sur la surface φ_1, et qui montre dès lors que les deux plans arbitraires φ_1 et φ_2 sont partout à la même distance, c'est-à-dire parallèles.

La solution pour ce premier Cas consiste donc simplement dans le système usuel des *Coordonnées Planes* ou *Rectilignes*.

II° « *Cinq des dérivées seulement sont supposées nulles à la fois* » soit, par exemple,

$$(23) \quad \frac{P}{\psi} = 0, \quad \frac{P}{\varpi} = 0, \quad \frac{Q}{\varpi} = 0, \quad \frac{Q}{\varphi} = 0, \quad \frac{R}{\varphi} = 0,$$

la dernière dérivée seule, $\frac{R}{\psi}$, étant supposée différente de zéro.

Ces hypothèses vérifient encore immédiatement nos équations du premier ordre (13), chacun des termes s'y réduisant séparément à zéro, comme renfermant au moins deux dérivées en facteurs; et quant au groupe du second ordre (19), la quantité G (18) étant alors évidemment nulle par la même raison que nous venons de dire, ces mêmes hypothèses vérifieront encore les deux premières de ces équations, et réduiront la dernière (les carrés des fonctions P, Q, R, (7), de même que leurs numérateurs $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, qui sont des sommes de trois carrés,

---

(*) La grandeur finie, que l'on obtiendrait en général par une quadrature semblable, serait celle de l'arc d'intersection des deux surfaces ψ et ϖ correspondant aux valeurs considérées de ces coordonnées, et limité aux deux surfaces φ_1 et φ_2, intersection dont chaque élément ds se confond, d'après la définition même du système orthogonal, avec l'élément dn de la normale à la surface φ qui rencontre cet élément. Seulement il arrive dans ce premier Cas, de même que dans les deux subséquents III° et V°, que, par suite de la nature, reconnue *a priori*, des familles ψ et ϖ, cet arc d'intersection, étant une droite, constitue par conséquent, d'après ce que nous venons de dire, une normale commune aux deux surfaces φ_1 et φ_2 correspondant à ses extrémités. La même circonstance enfin se produira également dans les deux Cas, II° à l'égard des familles ψ et ϖ, et IV° quant à la famille ψ seule, entraînera dès lors la même conséquence relativement à deux surfaces quelconques de l'une ou l'autre de ces deux familles.

ne pouvant être nuls en tout point, ce qui permet de diviser les équations par ces facteurs P, Q, R) simplement à celle-ci :

$$R\frac{R''}{\psi^2}-\left(\frac{R'}{\psi}\right)^2=0,\quad \text{ou}\quad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{d\psi}\right)=0,\quad \text{ou encore}\quad \frac{d^2.lR}{d\psi^2}=0,$$

laquelle donnera par suite, en intégrant,

$$lR = 2c\psi + 2c',\qquad \text{ou}\qquad R = e^{2(c\psi+c')},$$

en sorte que les valeurs des inconnues P, Q, R, relatives aux hypothèses (23), seront alors

$$(24)\qquad P = C^2,\qquad Q = C'^2,\qquad R = e^{2(c\psi+c')}.$$

D'autre part, étant introduites dans les expressions (12) des six courbures principales, ces mêmes hypothèses (23) montrent comme tout à l'heure que les surfaces φ et ϖ sont encore des plans, et que les surfaces ψ sont des surfaces développables, puisque, en se reportant à l'équation classique qui fournit l'expression des courbures principales d'une surface quelconque, le produit de ces courbures pour ces surfaces ψ, savoir $\frac{1}{R'_1}\frac{1}{R'_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, est alors égal à zéro.

Or, on aperçoit tout de suite qu'on ne pourra supposer pour ce Cas que les deux familles de plans φ et ϖ se composent l'une et l'autre de plans parallèles, car le même raisonnement déjà présenté à propos du Cas précédent I° fait voir aisément que dans cette supposition les six dérivées précitées seraient nécessairement toutes nulles à la fois, ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle (23).

Cela étant, prenons pour la famille φ celle de ces deux familles qui, en tout état de cause, n'est pas composée de plans parallèles. Le Théorème I de notre Chapitre II (p. 118), ou mieux encore la forme (69), basée sur cette hypothèse, que nous avons donnée à l'équation générale des familles isothermes de plans, permettra alors, en particularisant le choix des axes, de lui attribuer pour équation celle-ci :

$$(25)\qquad \frac{y}{x}=\tang(\alpha\varphi+6),\qquad \text{d'où}\qquad \cos^2(\alpha\varphi+6)=\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

laquelle donnera par la différentiation

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)} \dfrac{d\varphi}{dx} = -\dfrac{y}{x^2}, & \dfrac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)} \dfrac{d\varphi}{dy} = \dfrac{1}{x}, \\ & \dfrac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)} \dfrac{d\varphi}{dz} = 0; \end{array} \right.$$

et alors, tous les plans de cette famille contenant l'axe des z, tous ceux de la famille ϖ seront parallèles aux xy, en sorte que cette seconde famille aura nécessairement à son tour une équation de la forme

$$(27) \quad \varpi = az + b, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\varpi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varpi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\varpi}{dz} = a.$$

Dès lors, en se reportant aux trois équations de droite (21) et multipliant les deux dernières par le facteur $\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}$, on voit que la seconde de ces équations est d'ores et déjà vérifiée par les valeurs précédentes (27) et (26), et qu'en remettant dans les deux autres ces mêmes valeurs, elles se réduiront respectivement à celles-ci :

$$(28) \quad \frac{d\psi}{dz} = 0, \quad \text{et} \quad -\frac{y}{x^2}\frac{d\psi}{dx} + \frac{1}{x}\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad y\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

dont la première montre que les surfaces ψ sont des cylindres parallèles à l'axe des z, et la seconde déterminera par son intégrale générale la nature spéciale de ces cylindres, ou, ce qui revient au même, leur section droite par le plan xy. Or, cette intégrale, étant fournie par le système simultané

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \qquad \text{ou} \qquad xdx + ydy = 0 \qquad \text{et} \qquad d\psi = 0,$$

et d'ailleurs ψ ne contenant pas z, en vertu de la première équation (28), sera par conséquent

$$(29) \qquad x^2 + y^2 = \Psi(\psi);$$

d'où l'on voit que les surfaces ψ qui restaient seules à définir,

sont des cylindres de révolution autour de l'axe des z, par lequel passent tous les plans φ.

Dans ce second Cas, la solution cherchée se compose donc uniquement de la famille de plans ϖ normaux à l'axe des z, des plans méridiens φ menés tous par cet axe, et enfin de la famille de cylindres ψ, de révolution autour du même axe. C'est donc le système classique des *Coordonnées Cylindriques du Second Ordre*, ou *Semi-polaires*.

Du moment que nous avions reconnu dès le début de ce numéro, et par la seule considération des courbures principales, que la solution relative à ce Cas se composait de deux familles de plans et d'une famille de surfaces développables, l'on pouvait affirmer *a priori* qu'elle comprendrait ce système dont les trois familles sont toutes isothermes; mais il n'était ni évident, ni présumable qu'elle ne dût renfermer que celui-là seulement, d'où la nécessité et l'intérêt des raisonnements et des calculs que nous avons présentés à ce sujet (*).

La composition du système au point de vue géométrique étant ainsi exactement déterminée, bien que l'expression des coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées classiques ρ et ω soit élémentaire et employée à tout instant, comme celle des mêmes coordonnées x, y, z en fonction des coordonnées thermométriques actuelles φ, ψ, ϖ est beaucoup moins connue, nous croyons devoir poursuivre encore cette dernière recherche, en vue notamment de savoir au juste combien il entrera dans les dites expressions de constantes réellement arbitraires, et la manière exacte dont elles y figureront (**).

(*) La démonstration claire et rigoureuse de ce résultat ainsi strictement délimité eût été beaucoup plus difficile, sinon impossible, si nous n'avions pas établi préalablement, comme nous l'avons fait dans notre Chapitre II, la forme nécessaire de l'équation de toute famille isotherme de plans, ou, ce qui revient au même, la propriété caractéristique de tels plans de passer tous par une même droite, cette droite pouvant d'ailleurs être transportée à l'infini dans le cas des familles de plans parallèles.

(**) Ces constantes pouvant servir éventuellement à faire disparaître, dans les équations non homogènes, un nombre égal de termes gênants pour les calculs, nous croyons qu'il est intéressant d'en connaître exactement le nombre, même pour ce Cas simple, de même que nous nous proposons de le faire pour tous les Cas plus complexes qui viendront à la suite.

Pour cela, mettant tout d'abord l'équation (27) de la famille ϖ, en la résolvant par rapport à z, sous la forme

$$(30) \qquad z = \frac{1}{a}\varpi - \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad z = m\varpi + n,$$

nous aurons, en élevant au carré, puis ajoutant, séparément, les valeurs (27) d'une part, et (26) de l'autre,

$$(31) \qquad \Delta_1^2\varpi = a^2 = \frac{1}{m^2},$$

$$\frac{\alpha^2}{\cos^4(\alpha\varphi + 6)}\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^2,$$

et, en tenant compte alors de l'équation de droite (25), puis de l'équation (29) trouvée tout à l'heure pour la famille ψ :

$$(32) \qquad \alpha^2\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\Psi(\psi)}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_1^2\varphi = \frac{1}{\alpha^2\Psi(\psi)}.$$

Enfin, cette même équation (29) donnera semblablement pour la famille ψ,

$$\Psi'\frac{d\Psi}{dx} = 2x, \quad \Psi'\frac{d\Psi}{dy} = 2y, \quad \Psi'\frac{d\Psi}{dz} = 0, \quad \Psi'^2.\Delta_1^2\psi = 4(x^2+y^2) = 4\Psi,$$

d'où l'on tirera par conséquent :

$$(33) \qquad \Delta_1^2\psi = \frac{4\Psi}{\Psi'^2} = \frac{1}{\left(\frac{\Psi'}{2\sqrt{\Psi}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{d\sqrt{\Psi}}{d\psi}\right)^2}.$$

Substituant donc ces trois valeurs (32), (33), et (31), de $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, ainsi que celles (24) de P, Q, R, dans les trois équations de gauche (21), qui nous restent seules désormais à vérifier, nous obtiendrons

$$\frac{1}{\alpha^2\Psi(\psi)} = \frac{1}{C'^2e^{2(c\psi + c')}}, \qquad \frac{1}{\left(\frac{d\sqrt{\Psi}}{d\psi}\right)^2} = \frac{1}{C^2e^{2(c\psi + c')}}, \qquad \frac{1}{m^2} = \frac{1}{C^2C'^2},$$

ou, ce qui est la même chose :

(34) $$\alpha\sqrt{\Psi(\psi)} = C'e^{c\psi+c'}, \qquad \frac{d\sqrt{(\Psi\psi)}}{d\psi} = Ce^{c\psi+c'}, \qquad m = CC'.$$

Or, la première de ces équations donnant

(35) $$\sqrt{\Psi(\psi)} = \frac{C'}{\alpha}e^{c\psi+c'}, \qquad \frac{d\sqrt{\Psi(\psi)}}{d\psi} = \frac{C'c}{\alpha}e^{c\psi+c'},$$

la seconde et la troisième établiront dès lors entre les huit constantes C, C', c, c', m, n, α et β les deux seules relations

(36) $$\frac{C'c}{\alpha} = C \qquad \text{et} \qquad m = CC';$$

d'où il suit que sur ces huit constantes il en restera six complètement arbitraires, savoir, d'abord c', n et β, qui ne figurent pas dans les deux relations précédentes, et trois autres qu'on pourra prendre à volonté parmi C, C', c, m et α. Si donc nous faisons choix expressément pour ces trois dernières arbitraires de c, m et α, les deux relations (36) déterminant alors C et C' en fonction de celles-ci, et que nous convenions d'introduire, pour l'homogénéité, à la place de la constante arbitraire c' la nouvelle constante linéaire $l = \frac{C'}{\alpha}e^{c'}$, la valeur (35) de $\sqrt{\Psi}$ trouvée tout à l'heure devenant ainsi

$$\sqrt{\Psi(\psi)} = \frac{C'}{\alpha}e^{c'}.e^{c\psi} = le^{c\psi}, \qquad \text{d'où} \qquad \Psi(\psi) = l^2e^{2c\psi},$$

les équations des trois familles de surfaces composant le système seront alors définitivement

(37) $$\frac{y}{x} = \text{tang}\,(\alpha\varphi + \beta), \qquad x^2 + y^2 = l^2e^{2c\psi}, \qquad z = m\varpi + n,$$

ou, ce qui est la même chose, en résolvant les deux premières,

(38) $$x = le^{c\psi}\cos(\alpha\varphi + \beta); \qquad y = le^{c\psi}\sin(\alpha\varphi + \beta), \qquad z = m\varpi + n,$$

et contiendront les six constantes complètement arbitraires l, m, n, c, α et β.

A la vérité, les équations (37) ou (38), que nous venons de trouver, ne diffèrent pas de celles que nous eussions obtenues, après avoir déterminé la nature géométrique de chaque famille de surfaces, en rapportant isolément chacune d'elles à son paramètre thermométrique au moyen du procédé de Lamé (*); mais rien ne nous eût assurés, en suivant cette voie, que les six constantes ainsi introduites (deux constantes σ et τ pour chaque famille) fussent séparément arbitraires, ou, ce qui est la même chose, indépendantes entre elles (**), fait qui ressort au contraire très nettement du dernier calcul que nous venons de présenter, et qui suffit dès lors à en justifier l'opportunité.

Système des coordonnées cylindriques en général. Exemples. — III° « *Quatre des mêmes dérivées sont supposées nulles* ». — On peut, étant donnée cette hypothèse, en distinguer de nouveau deux autres subsidiaires, suivant que les deux seules dérivées qui ne sont pas nulles appartiendront au même groupe, ou chacune à un groupe différent. Or, il est facile de voir que la première de ces deux hypothèses ne pourra fournir aucune solution de la question.

En effet, supposons que les deux dérivées qui ne sont pas nulles appartiennent au même groupe, et soient, pour fixer les idées, $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{Q}{\varpi}$. On aura alors, par hypothèse, en sus des conditions générales (8),

$$\frac{P}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0.$$

(*) Ce résultat, évident d'ores et déjà pour la troisième famille ϖ composée de plans parallèles, nous l'avons établi dans notre Chapitre II pour la famille de plans φ [équation (69)], et pour la seconde famille ψ, il nous suffira de signaler qu'il coïncide exactement avec celui qu'indique Lamé pour cette classe de surfaces, dans la série des applications qu'il fait de sa méthode, au début de l'ouvrage déjà cité dans notre Chapitre précédent (*Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc.. § VIII, p. 9, *au bas*).

(**) Nous constaterons effectivement pour les Cas suivants que cette indépendance n'aura pas toujours lieu (voir notamment les expressions définitives analogues, relatives au Cas du système sphérique, lesquelles renferment seulement *cinq* constantes arbitraires, au lieu de six).

Or, en se rapportant aux équations (13), on voit que la première se réduira simplement par ces hypothèses à $R \frac{P}{\psi} \frac{Q}{\varpi} = 0$, équation qui ne pourra être vérifiée dans le Cas actuel, aucune des trois quantités P, Q, R, de même que leurs numérateurs $\Delta_1\varphi, \Delta_1\psi, \Delta_1\varpi$, ne pouvant être constamment nulle, et les deux autres facteurs $\frac{Q}{\varpi}$ et $\frac{P}{\psi}$ étant expressément supposés différents de zéro(*).

Les deux dérivées qui ne sont pas nulles appartenant dès lors nécessairement chacune à un groupe différent, il faudra encore examiner successivement trois cas, suivant que ces deux dérivées seront conjuguées, réciproques, ou ne rempliront ni l'une ni l'autre de ces conditions. Prenant donc arbitrairement $\frac{P}{\psi}$ pour l'une de ces deux dérivées, il y aura lieu de distinguer les trois sous-cas suivants, selon la colonne du tableau (12) à laquelle appartiendra l'autre dérivée.

1° « *Les deux dérivées qui ne sont pas nulles ne sont ni conjuguées ni réciproques* (**) » (c'est-à-dire qu'elles sont relatives à la fois à des variables indépendantes et à des fonctions diffé-

---

(*) Il est bien clair qu'en prenant successivement deux à deux les trois dérivées du même groupe, la même conclusion subsisterait à l'égard de chacune des trois combinaisons que l'on formerait ainsi, puisque ces combinaisons se déduiraient les unes des autres par la permutation simultanée des deux groupes (φ, ψ, ϖ) et (P, Q, R), laquelle, avons-nous remarqué, échange simplement entre elles les trois équations (13); et, en raisonnant de même, on arriverait encore à la même conclusion à l'égard du second groupe de dérivées.

Enfin le même raisonnement s'appliquera exactement de même aux trois couples de dérivées que l'on pourra ainsi envisager pour chacun des trois sous-cas que nous allons examiner à l'instant.

(**) Les dérivées que nous appelons *conjuguées* correspondent dans le tableau (12) aux courbures principales caractérisées par la propriété très simple et très claire d'appartenir à la même surface coordonnée, propriété que Lamé met en relief en leur attribuant la dénomination de *conjuguées en surface*. Quant aux autres de ces courbures qu'il qualifie de *conjuguées en arc*, et dont le caractère géométrique consiste dans une notion plus complexe et moins facile à saisir, nous avons jugé plus simple et plus clair de ne pas introduire de dénomination spéciale corrélative pour les dérivées qui leur correspondent, (et qui sont précisément celles-là mêmes que vise le premier cas subsidiaire actuellement envisagé), et de les spécifier dans notre classification des dérivées précitées uniquement par voie d'exclusion, ainsi que nous le faisons dans l'énoncé de ce sous-cas 1° (voir, pour plus de détails, LAMÉ, *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, § XXIX, p. 50, ou notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*, p. 87, *in medio*).

rentes), et sont alors (pour fixer les idées) $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{Q}{\varphi}$. On a alors, en sus des conditions générales (8), les hypothèses

$$\frac{P}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varpi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0,$$

qui réduisent comme tout à l'heure la dernière des équations (13) simplement à celle-ci : R $\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}=0$, laquelle ne peut encore être vérifiée, eu égard à l'hypothèse. Ce sous-cas 1° ne peut donc fournir aucune solution du problème.

2° « *Les deux dérivées qui ne sont pas nulles sont conjuguées* » et sont, par exemple, $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{R}{\psi}$. On a alors, outre les conditions (8),

$$(39) \qquad \frac{P}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0.$$

Ces hypothèses vérifient bien à la vérité les équations du premier ordre (13), attendu que chaque terme de ces équations contient en facteurs deux dérivées qui, pour aucun des termes, ne sont relatives à la même variable indépendante, mais elles sont incompatibles avec le groupe du second ordre (19), attendu que la seconde de ces équations se réduit par ces hypothèses à $Q^3 \frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}=0$, et ne peut plus être satisfaite avec la supposition admise.

On arriverait encore à la même conclusion, sans avoir égard à ce second groupe d'équations (19), en remarquant, à l'aide d'un raisonnement et d'un calcul exactement semblables à ceux qui nous ont conduits au résultat pour le Cas I° d'abord, puis pour le Cas II°, qu'étant données les hypothèses (39), les deux familles φ et ϖ sont encore des plans, et ne peuvent être composées l'une et l'autre de plans parallèles, car la troisième le serait alors aussi forcément.

Elles seront donc encore susceptibles d'être représentées par les mêmes équations (25) et (27); d'où l'on conclurait de nouveau, par les mêmes considérations, que les ψ ne pourraient être que des cylindres, c'est-à-dire des surfaces ayant l'une de leurs courbures principales constamment nulle; et par conséquent il faudrait que l'une au moins des deux dérivées $\frac{R}{\psi}$ ou $\frac{P}{\psi}$ fût aussi

nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce second cas subsidiaire, de même que le premier, ne pourra donc encore fournir aucune solution du problème.

3° « *Les deux dérivées qui ne sont pas nulles sont réciproques* », et sont, par exemple, $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{P}{\varpi}$. On a alors, outre les conditions générales (8), les hypothèses

(40) $$\frac{Q}{\varpi} = 0, \qquad \frac{Q}{\varphi} = 0, \qquad \frac{R}{\varphi} = 0, \qquad \frac{R}{\psi} = 0,$$

lesquelles vérifient bien encore le premier groupe (13), pour une raison complètement analogue à celle énoncée tout à l'heure, aucun des termes de ces équations ne contenant en facteur deux dérivées relatives à la même fonction P, Q, R. Quant au groupe du second ordre (19), elles vérifient bien encore les deux dernières, et réduisent la première simplement à

$$2PQR\left(Q\frac{P^2}{\psi^2} + R\frac{P^2}{\varpi^2}\right) = 2QR\left[Q\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + R\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right].$$

ou, ce qui est la même chose, P, Q, R ne pouvant être nuls, comme nous l'avons déjà remarqué, à celle-ci :

$$Q\left[P\frac{P^2}{\psi^2} - \left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right] + R\left[P\frac{P^2}{\varpi^2} - \left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right] = 0,$$

équation qui peut être écrite encore, en divisant par P^2, et remarquant que les hypothèses (8) et (40) correspondent d'ailleurs pour Q et R aux valeurs constantes $Q = C'^2$, et $R = C''^2$, sous l'une ou l'autre des deux formes

$$Q\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{d\psi}\right) + R\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{d\varpi}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad C'^2\frac{d^2.lP}{d\psi^2} + C''^2\frac{d^2.lP}{d\varpi^2} = 0,$$

ou encore, en faisant

(41) $$\frac{C'}{C''} = c, \qquad \text{ou} \qquad C''^2 = \frac{C'^2}{c^2},$$

puis divisant par C''^2 l'équation précédente, et la séparant en deux membres,

$$(41^{\text{bis}}) \qquad \frac{d^2 . lP}{d\varpi^2} = -c^2 \frac{d^2 . lP}{d\psi^2},$$

équation du type classique des Cordes Vibrantes, déjà rencontré dans le Chapitre II, et qui nous fournira, comme alors, pour solution la plus générale, l'expression

$$(42) \qquad lP = \mathcal{F}_1(\psi + ic\varpi) + \mathcal{F}_2(\psi - ic\varpi),$$

laquelle devra toujours être réelle, du moment que nous avons reconnu antérieurement que les inconnues P, Q, R étaient toutes trois essentiellement positives. Or, cette condition ne pourra être réalisée, de la façon la plus générale, qu'en supposant que les deux fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne diffèrent que par une constante additive réelle de deux fonctions de même forme, à coefficients imaginaires respectivement conjugués, c'est-à-dire puissent être représentées par

$$(43) \qquad \mathcal{F}_1(z) = \Phi(z) + i\Psi(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) = K + \Phi(z) - i\Psi(z),$$

tous les coefficients des deux fonctions Φ et Ψ étant alors réels ainsi que la constante K (*) : condition qui équivaudrait par con-

(*) On aperçoit de suite, en effet, que cette condition est bien suffisante, car, si l'on remplace dans deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ telles que (43) l'argument z respectivement par les deux quantités imaginaires $x + iy$ et $x - iy$, il est manifeste que, sauf la constante additive K, les deux résultats se déduiront l'un de l'autre en changeant simplement le signe de i, et par conséquent seront eux-mêmes, à cela près, deux expressions imaginaires conjuguées.

Mais le point essentiel, pour la généralité de la solution de la question actuellement posée, est d'être assuré que cette même condition est bien en même temps *nécessaire* pour la réalité d'une expression telle que la valeur de lP (42). Cette proposition, à la vérité, deviendrait, pour ainsi dire, manifeste, si l'on supposait que les quatre fonctions réelles Φ et Ψ, qui entrent dans la composition des deux fonctions en question que l'on pourra toujours représenter par

$$(\alpha) \qquad \mathcal{F}_1(z) = \Phi_1(z) + i\Psi_1(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) = \Phi_2(z) - i\Psi_2(z),$$

fussent toutes développables suivant la série de Taylor. Mais la possibilité de l'application de cette formule étant soumise, comme l'on sait, à de nombreuses restrictions, un semblable procédé ne saurait constituer qu'une simple *indication*, propre à mettre sur la voie

séquent, si l'on restreignait le choix des fonctions arbitraires aux seules fonctions à coefficients réels, à prendre pour elles deux

---

de la proposition à démontrer, mais non une démonstration véritable de la dite proposition.

Voici donc comment nous établirions, si le Lecteur nous le demandait, la proposition en question, en même temps qu'une autre toute semblable, qui nous sera également utile un peu plus loin.

Convenant de faire dans les expressions (α), pour l'un et l'autre indice,

$$(\text{ϐ}) \qquad \Phi(x+iy) = \mathrm{M} + i\mathrm{N}, \qquad \Psi(x+iy) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q},$$

les M, N, P, Q étant alors certaines fonctions réelles déterminées en x et y, nous en déduirons tout d'abord, en différentiant par rapport à y,

$$(\gamma) \qquad i\Phi'(x+iy) = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}, \qquad i\Psi'(x+iy) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y},$$

et, si nous convenons ensuite de dénoter par l'indice 0, placé en exposant, les valeurs particulières de ces différentes fonctions ou de leurs dérivées pour $y = 0$, nous obtiendrons, en introduisant cette hypothèse à la fois dans les égalités (ϐ) et (γ),

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(x) = \mathrm{M}^0 + i\mathrm{N}^0, & \Psi(x) = \mathrm{P}^0 + i\mathrm{Q}^0, \\ i\Phi'(x) = \left(\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right)^0 + i\left(\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right)^0, & i\Psi'(x) = \left(\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)^0 + i\left(\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)^0; \end{array}\right.$$

or, comme par hypothèse les quatre fonctions Φ et Ψ sont toutes à coefficients réels, il suit de là que l'on aura, pour les indices 1 et 2,

$$(\delta) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \mathrm{M}^0 = \Phi(x), & \mathrm{N}^0 = 0, & \mathrm{P}^0 = \Psi(x), & \mathrm{Q}^0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right)^0 = 0, & \left(\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right)^0 = \Phi'(x), & \left(\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)^0 = 0, & \left(\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)^0 = \Psi'(x). \end{array}\right.$$

Cela posé, les égalités de définition (α) et (ϐ) donneront pour la première fonction proposée $\mathfrak{F}_1$,

$$\mathfrak{F}_1(x+iy) = \Phi_1(x+iy) + i\Psi_1(x+iy) = \mathrm{M}_1 + i\mathrm{N}_1 + i(\mathrm{P}_1 + i\mathrm{Q}_1),$$

c'est-à-dire, en ordonnant par rapport à i, pour les deux fonctions $\mathfrak{F}$, les expressions

$$(\varepsilon) \qquad \mathfrak{F}_1(x+iy) = \mathrm{M}_1 - \mathrm{Q}_1 + i(\mathrm{N}_1 + \mathrm{P}_1), \qquad \mathfrak{F}_2(x+iy) = \mathrm{M}_2 - \mathrm{Q}_2 - i(\mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2),$$

la seconde se déduisant évidemment de la première, d'après les définitions précitées et (ϐ), en y changeant l'indice 1 en 2, et i en $-i$; et l'on en déduira dès lors, en ajoutant d'abord, puis en retranchant, et multipliant par i, ces deux autres expressions :

$$(\eta) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F}_1(x+iy) + \mathfrak{F}_2(x-iy) = \mathrm{M}_1 - \mathrm{Q}_1 + \mathrm{M}_2 - \mathrm{Q}_2 + i[\mathrm{N}_1 + \mathrm{P}_1 - (\mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2)], \\ i[\mathfrak{F}_1(x+iy) - \mathfrak{F}_2(x-iy)] = i[\mathrm{M}_1 - \mathrm{Q}_1 - (\mathrm{M}_2 - \mathrm{Q}_2)] - [\mathrm{N}_1 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2]. \end{array}\right.$$

Suivant donc que l'on exigera des deux fonctions proposées $\mathfrak{F}$ la réalité, soit, comme plus haut, de la première seulement de ces dernières expressions, soit, ainsi que nous serons amenés à le faire plus loin, de ces deux expressions (η) considérées à la fois, il



la même fonction F (z), sauf une constante additive, mais cette restriction serait arbitraire, et l'on n'aurait plus ainsi la solution la plus générale de la question.

---

faudra, suivant le cas, que la première seulement, ou l'une et l'autre simultanément des deux égalités

$$(\theta) \qquad N_1 + P_1 - (N_2 + P_2) = 0, \qquad M_1 - Q_1 - (M_2 - Q_2) = 0,$$

soient vérifiées, identiquement, ainsi que toutes leurs dérivées.

Or, si on les récrit, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à y, en rapprochant les termes analogues, ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = -(P_1 - P_2), & M_1 - M_2 = Q_1 - Q_2, \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} - \dfrac{\partial N_2}{\partial y} = -\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial y} - \dfrac{\partial P_2}{\partial y}\right), & \dfrac{\partial M_1}{\partial y} - \dfrac{\partial M_2}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_2}{\partial y}, \end{cases}$$

puis que l'on y fasse ensuite $y = 0$, il est clair que ces quatre dernières égalités se réduiront, en tenant compte des valeurs (δ), aux quatre suivantes :

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} 0 = -[\Psi_1(x) - \Psi_2(x)], & \Phi_1(x) - \Phi_2'(x) = 0, \\ \Phi_1'(x) - \Phi_2'(x) = 0, & 0 = \Psi_1'(x) - \Psi_2'(x), \end{cases}$$

le groupe de gauche, qui provient de la seule équation de gauche (θ), correspondant, d'après ce que nous avons expliqué, à la réalité de la première des deux expressions (η). Or, il est visible que ces deux équations domeront bien alors pour les deux fonctions proposées (α) deux expressions telles que (43), ainsi que nous l'énonçons dans le texte, à propos de la question qu'il s'agissait de résoudre.

L'ensemble des deux groupes (ζ), au contraire, qui se réduit en fait aux deux égalités de la première ligne seulement et qui représentent, d'après ce qui précède, les conditions nécessaires à la réalité simultanée des deux expressions (η), exprime évidemment que les deux mêmes fonctions (α) sont alors deux fonctions de même forme, à coefficients imaginaires respectivement conjugués, fonctions que nous désignerons, pour abréger, par la dénomination de *fonctions imaginaires conjuguées,* attendu qu'elles pourront alors, en vertu de leur définition, être écrites sous la forme

$$\mathcal{F}_1(z) = \Phi(z) + i\Psi(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) = \Phi(z) - i\Psi(z),$$

proposition fort importante, que nous aurons également l'occasion d'invoquer un peu plus loin, pour la solution définitive de la question actuelle.

Les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant supposées expressément du type que nous venons d'écrire, et par conséquent les expressions (η) étant réelles toutes les deux, ces expressions pourront alors être présentées sous une forme un peu différente, qu'il importe de rappeler en terminant cette Note, car c'est celle sous laquelle on énonce le plus souvent les résultats que nous rencontrerons pour ce Cas III.

En effet, l'hypothèse que nous venons de dire consistant à faire dans les formules (α) $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ et $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$, et par conséquent, d'après les définitions (β),

$$M_1 = M_2 = M, \qquad N_1 = N_2 = N, \qquad P_1 = P_2 = P, \qquad Q_1 = Q_2 = Q,$$

Les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant ainsi expressément supposées de la forme (43), si l'on convient de faire

$$(44) \qquad \mathcal{F}_1(z) = l\mathrm{F}_1(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) - \mathrm{K} = l\mathrm{F}_2(z), \qquad \mathrm{C} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{K}},$$

il est bien clair, eu égard à ces valeurs (43), que les deux fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}_1(z) = e^{\mathcal{F}_1(z)} \quad = e^{\Phi(z)+i\Psi(z)} = e^{\Phi(z)}\left[\cos\Psi(z) + i\sin\Psi(z)\right], \\ \mathrm{F}_2(z) = e^{\mathcal{F}_2(z)-\mathrm{K}} = e^{\Phi(z)-i\Psi(z)} = e^{\Phi(z)}\left[\cos\Psi(z) - i\sin\Psi(z)\right] \end{array} \right.$$

seront elles-mêmes deux fonctions imaginaires conjuguées, et les deux dernières des trois équations précédentes (44) donnant alors

$$(45) \qquad \mathrm{K} = 2l\mathrm{C} = l.\mathrm{C}^2, \qquad \mathcal{F}_2(z) = \mathrm{K} + l\mathrm{F}_2(z) = l.\mathrm{C}^2 + l\mathrm{F}_2(z),$$

l'équation intégrale (42), obtenue tout à l'heure, deviendra, en ayant égard à la valeur (44) de la fonction $\mathcal{F}_1$ et (45) de la fonction $\mathcal{F}_2$,

$$l\mathrm{P} = l.\mathrm{C}^2 + l\mathrm{F}_1(\psi + i c\varpi) + l\mathrm{F}_2(\psi - i c\varpi),$$

et par conséquent les expressions les plus générales des inconnues P, Q, R seront, dans le Cas actuel,

$$(46) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{C}^2\mathrm{F}_1(\psi + i c\varpi)\,\mathrm{F}_2(\psi - i c\varpi), \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C}'^2, \qquad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{C}'^2}{c^2},$$

F_1 et F_2 étant deux fonctions à coefficients imaginaires, arbitraires sous la condition d'être de même forme et à coefficients respec-

---

on voit qu'en désignant respectivement par A et B les expressions réelles en question (η), elles se réduiront alors respectivement à

$$\mathrm{A} = 2(\mathrm{M} - \mathrm{Q}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = -2(\mathrm{N} + \mathrm{P});$$

et comme l'égalité de gauche précédente (ε) serait devenue en même temps

$$\mathcal{F}_1(x + iy) = \mathrm{M} - \mathrm{Q} + i(\mathrm{N} + \mathrm{P}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - i\mathrm{B}),$$

il est manifeste que les deux quantités A et B pourront être considérées respectivement (au signe près, quant à la seconde) comme la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le résultat de la substitution de $x + iy$ à la place de z dans la fonction entièrement arbitraire $2\mathcal{F}_1(z)$, et la même concordance s'étendrait dès lors au signe de l'expression B lui-même, si l'on prenait pour cette quantité, au lieu de la seconde expression (η) elle-même, l'expression égale et de signe contraire $\frac{1}{i}\left[\mathcal{F}_1(x + iy) - \mathcal{F}_2(x - iy)\right]$.

tivement conjugués, et C, C′ et c désignant trois constantes arbitraires réelles.

Ce premier résultat acquis, le tableau (12) fait voir alors qu'avec les hypothèses (40) les surfaces φ ont leurs deux courbures principales nulles à la fois, et les surfaces ψ et ϖ ont chacune l'une de ces courbures nulle en tous leurs points. Les surfaces φ sont donc encore des plans, et les familles ψ et ϖ l'une et l'autre des surfaces développables.

Partant de là, le premier des deux Théorèmes de Lamé déjà cités (*) montre que l'intersection de deux surfaces ψ et ϖ quelconques est une droite, puisque les deux courbures $\frac{1}{R'_2}$ et $\frac{1}{R''_1}$, *conjuguées suivant cet arc*, sont nulles toutes les deux, d'après le tableau (12), avec les hypothèses (40). Et dès lors tous les plans de la famille φ, étant perpendiculaires à cette même droite, sont nécessairement parallèles (**).

Si nous prenons en conséquence, comme dans le Cas précédent, l'un des plans de cette famille pour plan des xy, auquel cas elle sera représentée par une équation de la forme

$$(47)\qquad z = a\varphi + b \qquad \text{ou} \qquad \varphi = Az + B,$$

en faisant $A = \frac{1}{a}$ et $-\frac{b}{a} = B$, cette équation entraînera dès lors immédiatement les valeurs

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0; \qquad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = A, \qquad \Delta_1^2\varphi = A^2 = \frac{1}{a^2},$$

qui, étant reportées, en même temps que celles (46) de Q et R,

---

(*) Coord. Curv., § XXXVIII, p. 65, ou encore notre *Mémoire sur l'Emploi des Coord. Curv.*, pp. 27 et 28.

(**) On arriverait encore à la même conclusion en remarquant qu'en vertu des résultats établis dans notre Chapitre II, si les plans qui composeront cette famille φ supposée isotherme ne sont pas tous parallèles, cette famille pourra être représentée de nouveau, comme lors du Cas précédent II°, par l'équation (25), qui entraînera encore comme conséquence nécessaire la première équation (32), ou, ce qui est la même chose, la valeur

$$\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{\alpha^2(x^2+y^2)},$$

expression manifestement irréductible avec une simple constante, qu'il faudrait trouver pour pouvoir satisfaire, avec les valeurs (46), à la première équation de gauche (21).

dans la première de gauche et les deux dernières de droite (21), réduiront en conséquence, pour le Cas actuel, ces trois équations aux suivantes :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{C'^2 \frac{C'^2}{c^2}} \quad \text{ou} \quad a = \frac{C'^2}{c}, \quad \text{avec} \quad \frac{d\varpi}{dz} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{dz} = 0,$$

dont la première exigeant à l'avance, ainsi que nous le disons dans la note précédente, que la famille φ soit composée de plans parallèles, les deux autres expriment à leur tour que les familles ψ et ϖ sont toutesd eux composées de cylindres parallèles à l'axe des z, et par conséquent normaux à la première famille φ.

La solution la plus générale du problème se compose donc pour ce sous-cas 3°, le seul auquel corresponde une solution, et par conséquent pour la totalité de ce Cas III°, d'une famille de plans parallèles, et de deux familles de cylindres orthogonaux entre eux et normaux à ces plans. C'est donc le système des *Coordonnées Cylindriques en général,* dont nous faisons usage sous le numéro III° (p. 131) dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes,* mais avec la restriction cette fois que les deux familles de cylindres soient toutes deux isothermes.

Parmi les six équations du système (21) qui, une fois les expressions (46) obtenues, restait désormais seul à intégrer, la moitié, à savoir les trois que nous venons de dire, définissant ainsi déjà le genre ou la nature géométrique des surfaces qui composent le système, le rôle des trois autres équations du même groupe, c'est-à-dire la première de droite et les deux dernières de gauche, consistera donc simplement à préciser rigoureusement la définition des deux familles de cylindres qui restent actuellement seules à délimiter, ou, ce qui est la même chose, à fixer exactement, par la détermination des inconnues ψ et ϖ en x et y, les équations de leurs sections droites par un plan quelconque de la famille φ.

Or, les deux dernières de ces équations étant ainsi

$$(48) \qquad \Delta_1^2\psi = \frac{1}{RP}, \qquad \Delta_1^2\varpi = \frac{1}{PQ} \qquad \text{ou} \qquad R\Delta_1^2\psi = Q\Delta_1^2\varpi = \frac{1}{P},$$

on voit alors en divisant par R, puis ayant égard aux valeurs ci-dessus trouvées (46), et joignant enfin à la première de droite (21), que nos deux fonctions inconnues ψ et ϖ devront vérifier à elles seules le système surabondant formé des trois équations

$$(49)\quad \begin{cases} \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2=c^2\left[\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)^2\right]=\dfrac{1}{\dfrac{C^2C'^2}{c^2}F_1(\psi+ic\varpi)\,F_2(\psi-ic\varpi)}, \\ \dfrac{d\psi}{dx}\dfrac{d\varpi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dy}\dfrac{d\varpi}{dy}=0, \end{cases}$$

dont l'intégration générale déterminera limitativement les familles de cylindres qui satisfont pour ce Cas à la question.

Si l'on veut procéder à cette détermination, le fait que la première et la dernière de ces trois équations ne contiennent pas les fonctions inconnues elles-mêmes, mais seulement leurs dérivées du premier ordre, montre *a priori* qu'il sera sans doute possible, en différentiant en x et y chacune de ces deux équations, de former, par l'élimination des cinq dérivées (premières et secondes) de l'une de ces inconnues entre les six équations dont on aura alors la disposition, une équation du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes, à laquelle devra satisfaire isolément l'autre inconnue (*). Et si l'on peut ensuite intégrer

(*) Si l'on veut obtenir d'une façon simple les résultats du calcul que nous venons de dire, le procédé le plus facile consistera à éliminer uniquement les deux dérivées rectangles $\frac{\psi^2}{xy}$ et $\frac{\varpi^2}{xy}$ entre les quatre équations, linéaires par rapport aux dérivées secondes, fournies par la différentiation des deux équations (49) précitées, en ayant égard en même temps à ces équations elles-mêmes. Le résultat de cette élimination ainsi restreinte, qui reste encore néanmoins sensiblement moins aisée que celle que nous allons effectuer dans le texte, sera les deux équations, écrites avec notre notation habituelle pour les dérivées partielles,

$$\left[\left(\frac{\psi}{x}\right)^2+c^2\left(\frac{\varpi}{x}\right)^2\right]\left(\frac{\varpi}{x}\Psi+\frac{\psi}{x}\Pi\right)=0,\quad \left[\left(\frac{\psi}{y}\right)^2+c^2\left(\frac{\varpi}{y}\right)^2\right]\left(\frac{\varpi}{y}\Psi+\frac{\psi}{y}\Pi\right)=0,$$

dans lesquelles Ψ et Π désignent, pour abréger, les deux quantités

$$\Psi=\frac{\psi^2}{x^2}+\frac{\psi^2}{y^2},\qquad \Pi=\frac{\varpi^2}{x^2}+\frac{\varpi^2}{y^2}.$$

séparément chacune des deux équations du second ordre ainsi obtenues, équations plus larges par conséquent que celles dont on sera parti, il faudra qu'après avoir restreint leurs solutions de manière qu'elles vérifient effectivement ces deux équations (49) elles-mêmes, l'on puisse encore, avec les solutions ainsi restreintes, satisfaire à la seconde équation restante du même groupe (49). Telle est donc à grands traits la marche que nous allons suivre.

Toutefois le calcul d'élimination que nous venons de dire étant notablement plus aisé si dans le système proposé (49) l'on intervertit, comme pour le Cas général, les fonctions inconnues et les variables indépendantes, c'est au problème, ainsi transformé, que nous allons appliquer de point en point la méthode que nous venons d'indiquer, et nous achèverons de cette façon la solution, même pour ce Cas particulier, sans sortir un seul instant de la voie indiquée par Lamé pour le Cas le plus général du problème, et que nous avons rapportée au début de ce Chapitre.

A cet effet, en appliquant tout d'abord au système actuel de surfaces les formules très connues (16) et (17) de notre ***Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes***, etc. (paragr. I, p. 18), déjà rappelées dans les deux premiers Chapitres de celui-ci, lesquelles donneront dans le cas présent, pour les premières, relativement à la coordonnée z en particulier,

(50) $$\frac{dz}{d\psi}\Delta_1\psi = \frac{d\psi}{dz} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{d\varpi}\Delta_1\varpi = \frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

Cela posé, si l'on fait attention que ψ et ϖ étant, en tant que coordonnées, essentiellement indépendantes l'une de l'autre, le déterminant fonctionnel $\Delta = \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{y} - \frac{\varpi}{x}\frac{\psi}{y}$ ne peut être identiquement nul, il s'ensuivra nécessairement : 1° que les deux équations ainsi obtenues ne pourront être vérifiées en égalant à zéro l'un ou l'autre de leurs premiers facteurs, ce qui équivaudrait à faire $\Delta = 0$; 2° que les deux équations linéaires et homogènes en Ψ et Π, constituées par les seconds facteurs auxquels elles se réduisent alors, ne pourront être vérifiées que par les seules valeurs $\Psi = 0$ et $\Pi = 0$, égalités qui représentent dès lors le résultat de l'élimination demandée. En joignant donc ces deux dernières équations à la troisième (49), on se trouve en présence du système du second ordre (74) ci-après, que nous obtenons immédiatement un peu plus loin à l'aide de considérations géométriques évidentes, et dont nous calculons d'ailleurs par une intégration directe la solution la plus générale.

et pour les secondes, par voie de conséquence,

$$K = \Delta_1^{-2}\psi = \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2, \qquad J = \Delta_1^{-2}\varpi = \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2,$$

on voit que les deux premières équations en question (49) pourront aussi bien être écrites

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2} = \frac{c^2}{\left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2} = \frac{1}{\frac{C^2C'^2}{c^2} F_1(\psi + ic\varpi)\, F_2(\psi - ic\varpi)},$$

ou, en renversant les rapports et multipliant alors par c^2, puis joignant enfin à la première de droite des formules précitées (17) du susdit Mémoire, dans laquelle nous aurons introduit également les hypothèses (50), nous aurons ainsi définitivement, au lieu et place du système précédent (49), le suivant :

$$(51)\quad \begin{cases} c^2\left[\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2\right] = \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2 = C^2C'^2F_1(\psi + ic\varpi)\, F_2(\psi - ic\varpi), \\ \frac{dx}{d\psi}\frac{dx}{d\varpi} + \frac{dy}{d\psi}\frac{dy}{d\varpi} = 0. \end{cases}$$

Cela fait, différentiant d'abord la première de ces équations en ψ et la dernière en ϖ, et écrivant, pour plus de facilité, les résultats à l'aide de notre notation habituelle relative aux dérivées partielles, nous formerons en premier lieu les deux équations

$$(52)\quad \begin{cases} c^2\left(\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\psi^2} + \frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\psi^2}\right) - \left(\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\varpi\psi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\varpi\psi}\right) = 0, \\ \frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\varpi^2} + \frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\varpi^2} + \frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\psi\varpi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\psi\varpi} = 0; \end{cases}$$

puis, différentiant semblablement la première en ϖ et la dernière en ψ, nous formerons en second lieu ces deux autres, analogues

aux précédentes :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} & c^2\left(\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\psi\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\psi\varpi}\right)-\left(\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\varpi^2}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\varpi^2}\right)=0,\\ & \frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\varpi\psi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\varpi\psi}+\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\psi^2}=0,\end{aligned}\right.$$

et alors, si nous ajoutons membre à membre, d'une part les deux équations (52) telles qu'elles sont, et d'autre part les deux équations (53), après avoir multiplié toutefois la seconde par $-c^2$, et que nous fassions pour abréger

$$(54)\qquad X = c^2\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{x^2}{\varpi^2},\qquad Y = c^2\frac{y^2}{\psi^2}+\frac{y^2}{\varpi^2},$$

on voit que nous aurons formé, entre ces deux quantités X et Y ainsi définies, le système linéaire et homogène

$$\frac{x}{\psi}X+\frac{y}{\psi}Y=0,\qquad \frac{x}{\varpi}X+\frac{y}{\varpi}Y=0,$$

dont le déterminant, qui n'est autre que le déterminant fonctionnel

$$(55)\qquad \Delta = \frac{x}{\psi}\frac{y}{\varpi}-\frac{y}{\psi}\frac{x}{\varpi},$$

ne saurait évidemment être identiquement nul, du moment que les deux variables, x et y d'une part, ou ψ et ϖ de l'autre, sont, en tant que coordonnées, essentiellement indépendantes l'une de l'autre (*) ; système qui ne pourra dès lors être vérifié que par les seules valeurs $X = 0$ et $Y = 0$, ou, ce qui est la même chose, eu égard aux définitions (54), en astreignant *a priori* les deux

(*) On arriverait d'ailleurs, dans le cas particulier, très aisément à la même conclusion sans invoquer les propriétés générales des déterminants fonctionnels, et par la seule considération des conditions de la question, en remarquant que l'identité

$$\left(\frac{x}{\psi}\frac{y}{\varpi}-\frac{y}{\psi}\frac{x}{\varpi}\right)^2=\left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{y}{\psi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2+\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2\right]-\left(\frac{x}{\psi}\frac{x}{\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y}{\varpi}\right)^2,$$

inconnues x et y à satisfaire individuellement aux deux équations

$$c^2\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{x^2}{\varpi^2}=0,\qquad c^2\frac{y^2}{\psi^2}+\frac{y^2}{\varpi^2}=0,$$

ou

$$\frac{d^2x}{d\varpi^2}=-c^2\frac{d^2x}{d\psi^2},\qquad \frac{d^2y}{d\varpi^2}=-c^2\frac{d^2y}{d\psi^2},$$

lesquelles leur assignent par conséquent à chacune, d'après le type classique des Cordes Vibrantes, une expression de la forme

(56) $$x=f_1(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V}),\qquad y=\mathcal{F}_1(\mathrm{U})+\mathcal{F}_2(\mathrm{V}),$$

en convenant de faire, pour abréger,

(57) $$\mathrm{U}=\psi+ic\varpi,\qquad \mathrm{V}=\psi-ic\varpi,$$

ainsi que nous a déjà donné l'équation (41bis) précédente, les symboles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne représentant pas, bien entendu, par hypothèse, dans la seconde de ces expressions (56), les mêmes fonctions que dans l'intégrale générale (42) de l'équation que nous venons de rappeler.

Connaissant ainsi la forme nécessaire des fonctions inconnues x et y, il ne nous reste plus maintenant qu'à disposer des quatre fonctions arbitraires f et $\mathcal{F}$ qui figurent dans ces expressions, de manière à vérifier les trois équations du premier ordre proposées (51) elles-mêmes.

---

se réduit dans le cas actuel, eu égard à la définition (55) de Δ et à la dernière équation (51), à la suivante :

$$\Delta^2=\left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{y}{\psi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2+\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2\right],$$

dans laquelle aucun des deux facteurs du second membre ne peut être supposé nul; car il faudrait pour cela, ou bien que x et y se réduisissent à la fois à des constantes, ou bien qu'ils ne fussent fonctions que de l'une seulement des deux coordonnées ψ ou ϖ, auquel cas il existerait alors entre ces deux variables x et y une relation $\mathrm{F}(x, y)=0$, à laquelle on arriverait par l'élimination de la dite coordonnée curviligne : hypothèses également inadmissibles, du moment que ces variables x et y représentent par hypothèse dans la question un système de coordonnées.

Pour cela, déduisant des expressions (56) et (57) par la dif[illegible] rentiation

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\psi} = f'_1(\mathrm{U}) + f'_2(\mathrm{V}), & \dfrac{dy}{d\psi} = \mathcal{F}'_1(\mathrm{U}) + \mathcal{F}'_2(\mathrm{V} \ [illegible] \\ \dfrac{dx}{d\varpi} = ic\left[f'_1(\mathrm{U}) - f'_2(\mathrm{V})\right], & \dfrac{dy}{d\varpi} = ic\left[\mathcal{F}'_1(\mathrm{U}) - \mathcal{F}'_2(\mathrm{V}) \ [illegible] \end{cases}$$

la substitution de ces valeurs dans la première et la dernière d[illegible] équations proposées (51) donnera d'abord respectivement l[illegible] deux conditions

$$\begin{cases} c^2\left[(f'_1 + f'_2)^2 + (\mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2)^2\right] = -c^2\left[(f'_1 - f'_2)^2 + (\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2)^2\right], \\ ic\left[(f'_1 + f'_2)(f'_1 - f'_2) + (\mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2)(\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2)\right] = 0, \end{cases}$$

(étant entendu, pour abréger, que la variable est U pour les fonctions affectées de l'indice 1, et V pour celles affectées de l'indice 2), c'est-à-dire, en réduisant ou développant, et supprimant ensuite les facteurs communs constants $2c^2$ ou ic, ces deux autres

$$f'^2_1 + f'^2_2 + \mathcal{F}'^2_1 + \mathcal{F}'^2_2 = 0, \qquad f'^2_1 - f'^2_2 + \mathcal{F}'^2_1 - \mathcal{F}'^2_2 = 0,$$

lesquelles, donnant immédiatement par addition et soustraction

$$f'^2_1 + \mathcal{F}'^2_1 = 0, \qquad f'^2_2 + \mathcal{F}'^2_2 = 0,$$

se réduisent en fait par conséquent aux deux suivantes, dans lesquelles nous supposons que le coefficient i emporte avec lui son signe (arbitraire d'ailleurs), c'est-à-dire où nous faisons $i = \pm\sqrt{-1}$,

$$(59)\qquad \mathcal{F}'_1(\mathrm{U}) = if'_1(\mathrm{U}), \qquad \mathcal{F}'_2(\mathrm{V}) = \pm\, if'_2(\mathrm{V}),$$

et ne seront dès lors satisfaites qu'en prenant dans les expressions (56)

$$(60)\qquad \mathcal{F}_1(\mathrm{U}) = if_1(\mathrm{U}) + c', \qquad \mathcal{F}_2(\mathrm{V}) = \pm\, if_2(\mathrm{V}) + c''.$$

Or il est facile de voir, relativement au double signe qui figure

en évidence dans la seconde de ces expressions (59) ou (60), que le signe — seul est admissible, car, en se reportant aux expressions (58) des dérivées de x et y, d'une part, celles de x exigeront d'abord pour la réalité que f_1 et f_2 soient deux fonctions de même forme à coefficients imaginaires respectivement conjugués (voir la note de la page 153, *in fine*); et d'autre part, cela étant admis, celles de y devenant par la substitution des valeurs (59)

$$(61) \qquad \frac{dy}{d\psi} = i\,[f'_1(\mathrm{U}) \pm f'_2(\mathrm{V})], \qquad \frac{dy}{d\varpi} = -\,c\,[f'_1(\mathrm{U}) \mp f'_2(\mathrm{V})],$$

l'on voit que le signe supérieur ne fournirait une expression réelle ni pour l'une, ni pour l'autre de ces dérivées, tandis que l'autre signe au contraire les rend bien réelles, comme cela doit être, toutes les deux à la fois.

Enfin, si l'on tient compte de cette restriction relative au double signe, les formules de gauche (58) et les précédentes (61) donnant alors

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2 &= [f'_1(\mathrm{U}) + f'_2(\mathrm{V})]^2 - [f'_1(\mathrm{U}) - f'_2(\mathrm{V})]^2 = 4f'_1(\mathrm{U})\,f'_2(\mathrm{V}), \\ \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2 &= -\,c^2[f'_1(\mathrm{U}) - f'_2(\mathrm{V})]^2 + c^2[f'_1(\mathrm{U}) + f'_2(\mathrm{V})]^2 = c^2.4f'_1(\mathrm{U})f'_2(\mathrm{V}), \end{aligned}\right.$$

on voit que la seconde équation (51), c'est-à-dire celle obtenue en égalant dans la première ligne l'un quelconque des deux premiers membres au troisième, qui nous reste seule désormais à satisfaire, se réduira simplement, eu égard aux définitions (57), à la condition

$$(62) \qquad 4c^2 f'_1(\mathrm{U})\,f'_2(\mathrm{V}) = \mathrm{C}^2\mathrm{C}'^2\mathrm{F}_1(\mathrm{U})\,\mathrm{F}_2(\mathrm{V}),$$

et sera par conséquent elle aussi vérifiée, en établissant seulement, entre les constantes et les fonctions arbitraires introduites par ces différents calculs, la corrélation

$$(63) \qquad 2cf'_1 = \mathrm{CC}'\mathrm{F}_1 \qquad \text{et} \qquad 2cf'_2 = \mathrm{CC}'\mathrm{F}_2,$$

qui déterminera à volonté, ou bien les fonctions f_1 et f_2 si l'on s'est donné F_1 et F_2, c'est-à-dire les expressions de x et y si l'on se donne celle (46) de P, ou inversement les fonctions F_1 et F_2 si l'on s'est donné f_1 et f_2, c'est-à-dire alors l'expression de la fonction P, en se donnant arbitrairement par le moyen des formules (56) et (60) celles des inconnues x et y (*).

Introduisant donc ces expressions (60), prises avec le signe — exclusivement, dans les précédentes (56), celles-ci s'offriront à la vérité de prime abord sous la forme

$$(64) \qquad x = f_1(\mathrm{U}) + f_2(\mathrm{V}), \qquad y = i\left[f_1(\mathrm{U}) - f_2(\mathrm{V})\right] + c' + c'',$$

(*) Si l'on se souvient, d'une part, que pour ce Cas particulier il résulte immédiatement des hypothèses (8) et (40), ainsi que nous l'avons expliqué, que Q et R sont alors deux constantes données C'^2 et C''^2, et ϖ la fonction linéaire (47) de φ, et si l'on fait attention, d'autre part, qu'eu égard à la façon même dont il a été introduit, le troisième membre de la première ligne d'équations (51) a pour valeur C'^2P, l'on voit que cette seconde manière de poser la question, à laquelle nous faisons allusion ci-dessus, équivaut à déterminer *simultanément* en φ et ψ les trois fonctions inconnues restantes, savoir P, x et y, à l'aide du système surabondant formé des quatre équations seules également restantes,

$$\left\{\begin{array}{ll} c^2\left[\left(\dfrac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\psi}\right)^2\right] = \left(\dfrac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\varpi}\right)^2 = C'^2P, & \\ \dfrac{dx}{d\psi}\dfrac{dx}{d\varpi} + \dfrac{dy}{d\psi}\dfrac{dy}{d\varpi} = 0, & c^2\dfrac{d^2 . lP}{d\psi^2} + \dfrac{d^2 . lP}{d\varpi^2} = 0, \end{array}\right.$$

dont la dernière n'est autre que l'équation (41bis) primitivement envisagée. Or, dans ce système les deux équations de gauche déterminant à elles seules les deux inconnues x et y, et leur assignant, comme nous venons de le voir, les expressions (64) ci-après, la seconde de ces mêmes équations fournira dès lors immédiatement, pour la troisième inconnue P, la valeur

$$\begin{aligned} P = \frac{c^2}{C'^2}\left[\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2\right] &= \frac{c^2}{C'^2}\left[(f'_1 + f'_2)^2 - (f'_1 - f'_2)^2\right] \\ &= \frac{4c^2}{C'^2} f'_1(\psi + ic\varpi) f'_2(\psi - ic\varpi), \end{aligned}$$

laquelle satisfait bien, ainsi qu'on le reconnaît de suite, à la quatrième équation du même groupe, les deux fonctions f_1 et f_2 restant toujours arbitraires.

Nous aurons occasion de faire utilement emploi de ce second mode de poser la question, lors d'un Cas ultérieur entièrement analogue à celui-ci.

mais pourront aussi bien être présentées sous cette autre forme, à la fois plus simple et plus symétrique,

$$(65)\qquad x=\frac{1}{2}\left[f_1(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V})\right],\qquad y=\frac{i}{2}\left[f_1(\mathrm{U})-f_2(\mathrm{V})\right],$$

si l'on commence par récrire *identiquement* les deux expressions (64) ainsi qu'il suit :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \left(f_1(\mathrm{U})-\frac{i(c'+c'')}{2}\right)+\left(f_2(\mathrm{V})+\frac{i(c'+c'')}{2}\right)\\ y &= i\left[\left(f_1(\mathrm{U})-\frac{i(c'+c'')}{2}\right)-\left(f_2(\mathrm{V})+\frac{i(c'+c'')}{2}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

et que l'on y substitue ensuite, comme simple notation, les symboles $\frac{1}{2}f_1(\mathrm{U})$ et $\frac{1}{2}f_2(\mathrm{V})$ pour représenter respectivement les deux fonctions de U et de V, mises en évidence par de grandes parenthèses dans les deux égalités que nous venons d'écrire, ce qui changera simplement les deux conditions trouvées tout à l'heure (63) dans les deux analogues

$$(66)\qquad cf'_1=\mathrm{CC'F}_1,\qquad cf'_2=\mathrm{CC'F}_2.$$

En remettant donc dans les expressions plus concises bien que tout aussi générales (65), à la place de U et V leurs valeurs (57), et y joignant l'équation de gauche (47), la solution définitive du problème sera représentée pour ce Cas par les trois expressions

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left[f_1(\psi+i c\varpi)+f_2(\psi-i c\varpi)\right],\\ y &= \frac{i}{2}\left[f_1(\psi+i c\varpi)-f_2(\psi-i c\varpi)\right],\\ z &= a\varphi+b,\end{aligned}\right.$$

et comprendra dès lors, outre les trois constantes arbitraires réelles a, b, c, deux fonctions imaginaires conjuguées f_1 et f_2, c'est-à-dire telles que

$$(68)\qquad f_1(t)=\Psi(t)+i\Pi(t),\qquad f_2(t)=\Psi(t)-i\Pi(t),$$

et dans la composition desquelles il entrera par conséquent deux fonctions à coefficients réels, Ψ et Π, entièrement arbitraires.

Si l'on veut revenir à présent à la question, envisagée sous la forme même où nous l'avions primitivement posée, c'est-à-dire si l'on demande de connaître inversement les expressions des coordonnées φ, ψ, ϖ en fonction des coordonnées x, y, z, faisant alors, par analogie avec les définitions (57),

$$(69) \qquad u = x - iy, \qquad v = x + iy,$$

puis ajoutant à deux reprises les deux équations (65), après avoir multiplié successivement la seconde par $-i$ et $+i$, il est clair que nous formerons ainsi ces deux autres

$$(70) \qquad u = f_1(\mathrm{U}), \qquad v = f_2(\mathrm{V}),$$

lesquelles deviendront, étant résolues par rapport à U et V,

$$(71) \qquad \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u), \qquad \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v),$$

les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, qui ne sont pas, bien entendu, par hypothèse les mêmes que celles qui figuraient antérieurement soit dans l'équation (42), soit dans la seconde équation (56), étant encore, de même que f_1 et f_2, deux fonctions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire du type (68), ainsi qu'il est évidemment nécessaire pour que les seconds membres de ces dernières égalités soient bien, de même que les premiers, deux expressions imaginaires respectivement conjuguées. Or ces mêmes égalités donnant par addition et soustraction, en se reportant aux définitions (57) de U et V,

$$(72) \qquad \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2ic}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right],$$

en remettant à présent, à la place de u et v leurs valeurs (69), et joignant à ces deux dernières égalités l'équation de droite (47),

l'on voit alors que les expressions les plus générales des trois coordonnées φ, ψ, ϖ en fonction des coordonnées rectilignes, ou, ce qui revient au même, les équations des trois familles de surfaces composant le système, seront pour la question actuelle

$$(73) \quad \begin{cases} \varphi = Az + B, \\ \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) + \mathcal{F}_2(x + iy)\right], \\ \varpi = \frac{1}{2ic}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) - \mathcal{F}_2(x + iy)\right]; \end{cases}$$

et il est bien clair que les deux dernières de ces expressions, ou, ce qui est la même chose, les précédentes (72), seront précisément les expressions les plus générales des inconnues ψ et ϖ qui vérifient le système du premier ordre (49) primitivement posé, pourvu que les nouvelles fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ satisfassent encore aux mêmes conditions ci-dessus (66), dans lesquelles f_1 et f_2 représenteront alors par définition les fonctions inverses de ces fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, ainsi que l'indiquent les équations réciproques (70) et (71).

Or si l'on fait attention, d'une part, qu'en passant du système (49) au système (51) par l'interversion des inconnues et des variables indépendantes, chaque membre de cette seconde forme d'équations (51) provient exclusivement du membre correspondant de la première forme (49), et si l'on se rappelle, d'autre part, que la forme de la solution (64) ou (65) du second système a été imposée dans le calcul qui précède, uniquement par la première et la dernière de ces équations (51), celle du milieu n'intervenant que pour imposer la condition (62) qui peut servir alors, comme nous l'avons dit, à une double fin; il est bien évident, dès lors, qu'en revenant au premier système (49), on devra considérer que la forme de sa solution la plus générale (72) est fixée de même exclusivement par la première et la dernière de ces équations (49), la seconde n'intervenant encore que pour procurer la même condition réversible (62) entre les quatre fonctions

arbitraires F et $\mathcal{F}$ (*), introduites jusque-là tant par un calcul antérieur que par cette solution elle-même, condition qui fournira indifféremment, comme tout à l'heure, soit les expressions définitives des inconnues ψ et ϖ lorsque l'on se sera donné l'expression (46) de P, soit au contraire celle de P, en se donnant arbitrairement les expressions (72) de ψ et ϖ. Cette simple remarque nous sera du plus grand secours, comme on le verra, pour la solution d'un problème entièrement analogue que nous offrira bientôt l'un des Cas ultérieurs.

Si nous n'avions pas tenu à rester sur le terrain exclusivement analytique et à demeurer fidèle à notre programme strict, consistant à résoudre pour chaque Cas le problème à l'aide des méthodes mêmes indiquées par Lamé, nous eussions pu parvenir plus aisément peut-être, ou tout au moins plus rapidement, aux mêmes résultats, en nous basant sur une interprétation géométrique du système du premier ordre (49), qui s'offre immédiatement à l'esprit lorsqu'on examine la raison d'être ou la signification de ce système, à dater du moment où la question s'y est trouvée réduite. Et comme ce second mode de résoudre le problème nous servira également pour le Cas subséquent déjà annoncé tout à l'heure, il ne sera pas inutile de nous assurer rapidement, à l'occasion de celui-ci, qu'il nous conduirait bien exactement à la même solution que nous venons de trouver en suivant de point à point la méthode générale indiquée par Lamé.

En effet, parmi les six équations (21) qui définissent, pour les Cas particuliers envisagés dans ce Chapitre, le problème analytique du système orthogonal triplement isotherme, les trois équations auxquelles nous avions alors déjà satisfait, savoir la première de gauche et les deux dernières de droite, expriment simplement, ainsi que nous l'avons vu, que le système cherché

(*) Ou, en termes plus exacts, la même condition (62) de laquelle on aurait fait disparaître le coefficient 4 du premier membre, en raison du changement de notation dont nous sommes convenus pour passer de la forme d'expressions (64) à la forme définitive (65), réciproque de la forme actuellement en question (72).

se compose dans le Cas actuel de deux familles de cylindres parallèles, et d'une famille de plans normaux à ces cylindres. Il est donc évident que l'ensemble des trois autres équations du même groupe qui nous restent encore à vérifier, ou, ce qui est la même chose, des trois équations (49), ne saurait exprimer analytiquement autre chose que cette triple condition, à savoir que les deux familles de cylindres sont chacune isotherme et, de plus, orthogonales entre elles; car, la nature de chaque famille de surfaces étant supposée expressément celle que nous venons de dire, c'est bien là évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse constituer avec les dites familles un système orthogonal triplement isotherme. Or, posée dans les termes que nous venons de dire, la question se réduit, au contraire, à un problème analytique très simple, et conduit alors sans peine à un résultat dont l'une des formes est très connue.

En effet, les équations du problème géométrique ainsi défini n'étant autres que celles du système primitif (1), réduit à deux fonctions inconnues et deux variables indépendantes seulement, savoir :

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}=0, \qquad \frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}=0,\\ &\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varpi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varpi}{dy}=0, \end{aligned}\right.$$

les intégrales générales des deux premières de ces équations, considérées isolément, seront encore, ainsi que nous l'avons déjà dit dans notre Chapitre II (page 41), d'après le type classique des Cordes Vibrantes,

$$\psi=\psi_1(x-iy)+\psi_2(x+iy), \qquad \varpi=\varpi_1(x-iy)+\varpi_2(x+iy),$$

ou, plus simplement, en introduisant de nouveau nos quantités u et v (69),

$$(75)\qquad \psi=\psi_1(u)+\psi_2(v), \qquad \varpi=\varpi_1(u)+\varpi_2(v),$$

et donneront dès lors, par la différentiation,

$$(76)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx} = \psi_1' + \psi_2', & \dfrac{d\psi}{dy} = i(-\psi_1' + \psi_2'), & \dfrac{d\psi}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\varpi}{dx} = \varpi_1' + \varpi_2', & \dfrac{d\varpi}{dy} = i(-\varpi_1' + \varpi_2'), & \dfrac{d\varpi}{dz} = 0, \end{cases}$$

la variable étant cette fois u pour les fonctions affectées de l'indice 1, et v pour celles affectées de l'indice 2. En substituant ces dernières valeurs dans la troisième équation (74), celle-ci deviendra donc

$$(\psi_1' + \psi_2')(\varpi_1' + \varpi_2') - (\psi_1' - \psi_2')(\varpi_1' - \varpi_2') = 0,$$

ou simplement, en réduisant,

$$2(\varpi_1'\psi_2' + \psi_1'\varpi_2') = 0,$$

ou par conséquent, en séparant les variables,

$$\frac{\psi_1'(u)}{\varpi_1'(u)} = -\frac{\psi_2'(v)}{\varpi_2'(v)} = \text{const.} = k;$$

car, vu que l'on peut évidemment prendre pour variables indépendantes u et v à la place de x et y, chacun de ces rapports ne dépendant que de l'une ou de l'autre de ces quantités seulement, leurs valeurs ne pourront être égales, quelles que soient ces variables, qu'à la condition que cette valeur commune soit une simple constante k. Il sera donc nécessaire et suffisant, pour que cette troisième équation (74) soit vérifiée, que l'on ait à la fois

$$(77)\quad \psi_1'(u) = k\varpi_1'(u) \qquad \text{et} \qquad \varpi_2'(v) = -\frac{1}{k}\psi_2'(v),$$

ou

$$\psi_1(u) = k\varpi_1(u) + c' \qquad \text{et} \qquad \varpi_2(v) = -\frac{1}{k}\psi_2(v) + c'',$$

et, par suite, en reportant dans les valeurs ci-dessus (75), les

expressions les plus générales de ψ et de ϖ qui satisfassent à la fois aux trois équations (74) seront

$$(78) \qquad \psi = k\varpi_1(u) + c' + \psi_2(v), \qquad \varpi = \varpi_1(u) - \frac{1}{k}\psi_2(v) + c'';$$

expressions qui pourront encore, comme celles fournies par le calcul précédent, être présentées sous une forme plus simple, bien que tout aussi générale, en les récrivant d'abord *identiquement* ainsi qu'il suit :

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \left(k\varpi_1(u) + \frac{c' + kc''}{2}\right) + \left(\psi_2(v) + \frac{c' - kc''}{2}\right), \\ \varpi &= \frac{1}{k}\left[\left(k\varpi_1(u) + \frac{c' + kc''}{2}\right) - \left(\psi_2(v) + \frac{c' - kc''}{2}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

et adoptant alors simplement les symboles $\frac{1}{2}\mathcal{F}_1$ et $\frac{1}{2}\mathcal{F}_2$ pour représenter les fonctions de u et de v mises ainsi en évidence par de grandes parenthèses dans ces écritures, ce qui les transformera dès lors dans les suivantes :

$$(79) \qquad \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2k}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right].$$

La forme nécessaire de nos inconnues ψ et ϖ étant ainsi fournie par un calcul très simple, en se basant comme point de départ sur la signification géométrique évidente du système proposé (49), il ne reste plus, comme dans le calcul précédent, qu'à disposer de la constante k et des fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui figurent dans ces dernières expressions, de manière à satisfaire à ce système proposé lui-même (et non plus seulement au système du second ordre (74) que nous lui avons substitué par le raisonnement qui précède), c'est-à-dire, en fait, aux deux premières équations de ce système (49) seulement, puisque la dernière faisait également partie du système du second ordre (74) qui nous a conduit à ces expressions (79), et est par conséquent dores et déjà vérifiée par elles, quelles que soient les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ et la constante k.

A cet effet, tirant d'abord, comme plus haut, par la différentiation desdites expressions (79), les valeurs

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\psi}{dx} = \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}'_1(u) + \mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\psi}{dy} = \dfrac{i}{2}\left[-\mathcal{F}'_1(u) + \mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\psi}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\varpi}{dx} = \dfrac{1}{2k}\left[\mathcal{F}'_1(u) - \mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\varpi}{dy} = \dfrac{i}{2k}\left[-\mathcal{F}'_1(u) - \mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\varpi}{dz} = 0, \end{array}\right.$$

d'où nous conclurons celles-ci :

$$(80) \quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left[(\mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2)^2 - (\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2)^2\right] = \mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v), \\ \left(\dfrac{d\varpi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varpi}{dy}\right)^2 = \dfrac{1}{4k^2}\left[(\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2)^2 - (\mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2)^2\right] = -\dfrac{1}{k^2}\,\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v); \end{array}\right.$$

puis, reportant ces dernières valeurs dans les deux premières équations précitées (49), et y introduisant en même temps au dernier membre les quantités déjà employées (57), ces équations se réduiront alors aux deux suivantes

$$(81) \qquad \mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v) = -\frac{c^2}{k^2}\,\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v) = \frac{1}{\dfrac{C^2C'^2}{c^2}\,F_1(U)\,F_2(V)},$$

dont la première exigera tout d'abord pour être vérifiée identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, que l'on prenne

$$(82) \qquad -c^2 = k^2 \qquad \text{ou} \qquad k = ic, \qquad (*)$$

et dès lors, avec cette valeur, il sera nécessaire et suffisant pour la réalité des deux expressions (79) que les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ soient deux fonctions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire du type (68). Puis, cela fait, si l'on ajoute encore à deux reprises, à

(*) Il est sans intérêt d'écrire le double signe devant le coefficient i, car la considération successive des deux signes équivaut évidemment à permuter simplement dans les expressions (79) les deux symboles de fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

la première équation (79), la seconde successivement multipliée par $+2k$ et $-2k$, k étant la valeur (82) que nous venons de trouver, on voit, en ayant égard aux définitions (57), que l'on obtiendra ainsi de nouveau les deux équations

$$(83) \qquad \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u), \qquad \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v),$$

dont nous représenterons encore les réciproques par ces deux autres,

$$(84) \qquad u = f_1(\mathrm{U}), \qquad v = f_2(\mathrm{V});$$

et alors si dans la seconde équation ci-dessus (81), savoir :

$$\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v) = \frac{1}{\frac{\mathrm{C}^2\mathrm{C}'^2}{c^2}\mathrm{F}_1(\mathrm{U})\,\mathrm{F}_2(\mathrm{V})}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v)} = \frac{\mathrm{C}^2\mathrm{C}'^2}{c^2}\mathrm{F}_1(\mathrm{U})\,\mathrm{F}_2(\mathrm{V}),$$

on exprime simultanément les deux membres, soit en u et v, soit en U et V, à l'aide de l'un ou de l'autre des deux systèmes réciproques (83) ou (84), il est clair qu'il sera encore nécessaire et suffisant, pour que cette dernière équation soit également vérifiée, que l'on ait alors séparément entre les quatre fonctions $\mathcal{F}$ et F les relations réversibles, et par suite utilisables pour une double fin,

$$\frac{1}{\mathcal{F}'_1(u)} = \frac{\mathrm{CC}'}{c}\mathrm{F}_1(\mathrm{U}), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathcal{F}'_2(v)} = \frac{\mathrm{CC}'}{c}\mathrm{F}_2(\mathrm{V}),$$

qui coïncident bien manifestement avec celles (66) rencontrées dans notre précédent calcul, du moment que la différentiation des systèmes réciproques (84) et (83) fournira évidemment les expressions

$$(85) \qquad f'_1(\mathrm{U}) = \frac{du}{d\mathrm{U}} = \left(\frac{d\mathrm{U}}{du}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{F}'_1(u)}, \qquad f'_2(\mathrm{V}) = \frac{dv}{d\mathrm{V}} = \left(\frac{d\mathrm{V}}{dv}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{F}'_2(v)}.$$

Si donc nous remettons à la fois, dans les expressions (79), à la place de u et v leurs valeurs de définition (69), et à la place de

la constante k sa valeur imposée (82), et que nous leur adjoignions de nouveau l'équation de droite (47), on voit que les expressions les plus générales de nos inconnues φ, ψ, ϖ seront encore, par ce second mode de calcul, exactement les mêmes, non seulement quant à la forme, mais aussi quant à l'étendue, que par le premier, strictement conforme à la méthode indiquée par Lamé :

$$(86)\quad \begin{cases} \varphi = Az + B, \\ \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) + \mathcal{F}_2(x + iy)\right], \\ \varpi = \frac{1}{2ic}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) - \mathcal{F}_2(x + iy)\right]. \end{cases}$$

Il faut bien faire attention, au sujet des deux dernières de ces expressions, qu'en les supposant ramenées l'une et l'autre à la forme M + iN, M et N étant réels, nous ne pourrons plus cette fois, comme dans les formules (34), (39) ou (43) de notre Chapitre II, y prendre encore pour solution soit la fonction M, soit la fonction N correspondantes, attendu que les trois équations (74) qui nous ont fourni ces expressions de ψ et de ϖ ne sont pas toutes linéaires et homogène, comme l'était l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ envisagée seule à l'endroit précité de notre Chapitre II. Pour que les formules précédentes (86) fournissent une solution admissible du problème à la fois analytique et géométrique que nous nous sommes posé, il sera donc nécessaire actuellement que les deux expressions en question de ψ et de ϖ soient exclusivement réelles : condition qui ne sera remplie, de la façon la plus générale, qu'en prenant pour les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui resteront arbitraires sous cette condition, deux fonctions imaginaires conjuguées, ainsi que nous le démontrons dans la note de la page 153.

A la vérité, si l'on a égard à la remarque qui termine cette note, le résultat que nous venons d'obtenir par ce second calcul ne diffère que fort peu, comme étendue ou généralité des formules, de la solution de ce même problème fournie par cette proposition

très connue, mentionnée par Lamé (*), et reproduite par presque tous les traités d'Analyse, à savoir que si, dans une fonction entièrement quelconque F (z) [que l'on devra, par conséquent, pour la plus grande généralité, supposer de la forme F $(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$, Φ et Ψ étant deux fonctions réelles (**)], on remplace la variable z par $x + iy$, et que l'on fasse ensuite F $(x + iy) = A + iB$, A et B étant tous deux réels, le système $\psi = \pm A$, $\varpi = \pm B$, vérifiera le système du second ordre (74), et représentera par conséquent deux familles de cylindres, à la fois isothermes et orthogonales entre elles. Mais, de même que pour le problème général de l'isothermie envisagé dans notre Chapitre II, le calcul de simple vérification par lequel on a coutume d'établir cette proposition ne montre en quoi que ce soit que la solution ainsi obtenue soit la seule, ni même la plus générale possible (***). C'est pourquoi il nous a semblé de nouveau utile de procéder de même, au sujet de ce second problème, à une recherche directe, consistant dans l'intégration effective du système en question (74), et qui, elle, au contraire, ne permette pas de douter que ses résultats n'embrassent la totalité de la solution.

Terminons cette théorie, suivant notre coutume, en présentant quelques exemples d'application des formules que nous venons de donner.

(*) Lamé, *Leçons sur les Coordon. Curv.*, § CVII, *in fine* (pp. 191-194).

(**) Nous n'avons trouvé cette observation mentionnée explicitement dans aucun des Auteurs que nous avons consultés, bien qu'elle soit évidemment indispensable pour la généralité de la proposition en question, ou de la solution du système envisagé (74).

(***) Et par le fait elle ne l'est pas, rigoureusement parlant, puisque deux quantités particulières A et B ainsi formées constituant une solution, il est manifeste, d'après la forme même du système en question (74), que deux fonctions linéaires quelconques de ces quantités, savoir $\psi = mA + p$, et $\varpi = nB + q$, m, n, p, q étant des constantes entièrement arbitraires, constitueront encore une solution du même système : d'où il suit nécessairement que le rapport des deux invariants du premier ordre $\Delta_1\psi$ et $\Delta_1\varpi$ doit être une constante arbitraire c, ainsi que nous le trouvons par notre calcul [équations (80) et (82)], et non pas expressément l'*unité*, comme l'entraîne forcément la solution citée tout à l'heure dans le texte, ainsi que le montre d'ailleurs également Lamé (*loc. cit.*, p. 184).

1° Prenons dans les formules (73) ou (72), pour les deux fonctions conjuguées $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, les fonctions

$$\mathcal{F}_1(u) = -\frac{1}{\alpha}\left(6 - i\log\frac{u}{l}\right), \qquad \mathcal{F}_2(v) = -\frac{1}{\alpha}\left(6 + i\log\frac{v}{l}\right),$$

et écrivons-y en même temps, comme constante, $\frac{c}{\alpha}$ au lieu de c. Nous aurons alors par les dites formules (72)

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right] = -\frac{1}{2\alpha}\left[26 + i\left(\log\frac{v}{l} - \log\frac{u}{l}\right)\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2i\frac{c}{\alpha}}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2i\frac{c}{\alpha}\cdot\alpha}\left[i\log\frac{u}{l} + i\log\frac{v}{l}\right], \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(87) \qquad \alpha\psi + 6 = -\frac{i}{2}\log\frac{v}{u}, \qquad 2c\varpi = \log\frac{uv}{l^2}.$$

Or, d'après la théorie générale des quantités imaginaires, les deux expressions conjuguées u et v pouvant être considérées sous la forme

$$u = x - iy = \rho e^{-i\omega}, \quad v = x + iy = \rho e^{i\omega}, \quad \frac{v}{u} = e^{2i\omega}, \quad uv = \rho^2,$$

le *module* ρ et l'*argument* ω étant, par définition, les quantités

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \omega = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

les expressions précédentes (87) deviennent, avec ces variables,

$$\alpha\psi + 6 = -\frac{i}{2}\log e^{2i\omega} = -\frac{i}{2}\cdot 2i\omega = \omega, \qquad 2c\varpi = \log\frac{\rho^2}{l^2},$$

et par conséquent, en prenant la tangente pour l'une, et revenant au nombre pour l'autre, on aura dans ce cas, pour tenir lieu des deux dernières formules (73),

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\omega = \text{tang}\,(\alpha\psi + 6), \qquad x^2 + y^2 = \rho^2 = l^2 e^{2c\varpi}.$$

Si l'on fait abstraction des deux membres intermédiaires, ce sont *littéralement*, sauf permutation des coordonnées φ, ψ, ϖ, les formules du système (37) qui définit le système cylindrique du second ordre, avec les constantes arbitraires qu'il comporte essentiellement, lequel devait évidemment, *a priori*, rentrer comme cas-limite dans le système général que nous venons d'étudier.

2° Prenons encore dans les formules (72), cette fois avec la valeur $c = 1$ de la constante, pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la même fonction réelle

$$\mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t) = \arcsin \frac{t}{l},$$

en sorte que nous aurons d'une part, d'après les définitions (57), les valeurs

$$(87^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{U} = \psi + i\varpi, & \mathrm{V} = \psi - i\varpi \\ \text{ou} & \\ \psi = \frac{1}{2}(\mathrm{U} + \mathrm{V}), & i\varpi = \frac{1}{2}(\mathrm{U} - \mathrm{V}), \end{array} \right.$$

et d'autre part, d'après les formules (71) et (70), les expressions réciproques

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u) = \arcsin \frac{u}{l} & \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v) = \arcsin \frac{v}{l}, \\ \text{ou} & \\ u = f_1(\mathrm{U}) = l \sin \mathrm{U} = l \sin(\psi + i\varpi), & v = f_2(\mathrm{V}) = l \sin \mathrm{V} = l \sin(\psi - i\varpi). \end{array} \right.$$

Cela posé, on pourra résoudre la question en se proposant de déterminer de prime abord, soit l'expression des trois coordonnées rectilignes en φ, ψ, ϖ, pour tirer de là les équations des trois familles de surfaces, soit inversement ces dernières équations elles-mêmes, pour en déduire ensuite les expressions en question de x, y, et z.

Par le premier procédé, qui est le plus rapide, en remettant

les secondes valeurs (88) dans les formules (65) ou les deux premières formules (67), celles-ci deviendront

$$(88^{bis})\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left[f_1(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V})\right]=\frac{l}{2}\left[\sin(\psi+i\varpi)+\sin(\psi-i\varpi)\right]=l\sin\psi\cos i\varpi, \\ y=\frac{i}{2}\left[f_1(\mathrm{U})-f_2(\mathrm{V})\right]=\frac{il}{2}\left[\sin(\psi+i\varpi)-\sin(\psi-i\varpi)\right]=l\cos\psi .\, i\sin i\varpi, \end{cases}$$

expressions qui sont bien réelles, nonobstant la présence de l'imaginaire i, attendu qu'elles peuvent s'écrire tout aussi bien, à l'aide des sinus et cosinus hyperboliques,

$$(89)\qquad x = l\sin\psi \operatorname{csh}\varpi, \qquad y = -l\cos\psi \operatorname{snh}\varpi,$$

et donneront dès lors, en éliminant successivement ϖ et ψ, pour les deux familles de cylindres dans le cas actuel, les équations

$$(89^{bis})\qquad \frac{x^2}{\sin^2\psi}-\frac{y^2}{\cos^2\psi}=l^2, \qquad \frac{x^2}{\operatorname{csh}^2\varpi}+\frac{y^2}{\operatorname{snh}^2\varpi}=l^2,$$

qui montrent que ces cylindres sont à base hyperbolique pour la première famille, à base elliptique pour la seconde, et d'ailleurs tous homofocaux entre eux.

Quant à la seconde méthode, voici comment il faut alors diriger la recherche, que nous croyons devoir indiquer également parce qu'elle nous servira ultérieurement de type pour un calcul analogue intéressant, mais plus compliqué.

Proposons-nous de former une équation du second degré, dont les deux racines soient $\sin^2\psi$ et $\sin^2\left(i\varpi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 i\varpi$.

A cet effet, les secondes formules (87bis) nous donnant

$$\begin{cases} \sin^2\psi = \dfrac{1-\cos 2\psi}{2} = \dfrac{1-\cos(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{2}, \\ \cos^2 i\varpi = \dfrac{1+\cos 2i\varpi}{2} = \dfrac{1+\cos(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{2}, \end{cases}$$

nous en déduirons

$$\left\{\begin{aligned}\sin^2\psi + \cos^2 i\varpi &= \frac{1}{2}\left[1 - \cos(U+V) + 1 + \cos(U-V)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2 + \{\cos(U-V) - \cos(U+V)\}\right]\\ \sin^2\psi . \cos^2 i\varpi &= \frac{1}{4}\left[1 - \cos(U+V)\right]\left[1 + \cos(U-V)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[1 + \{\cos(U-V) - \cos(U+V)\} - \cos(U+V)\cos(U-V)\right],\end{aligned}\right.$$

valeurs qui, à cause des égalités

$$\left\{\begin{aligned}&\cos(U-V) - \cos(U+V) = 2\sin U \sin V,\\ &\cos(U+V)\cos(U-V) = \cos^2 U \cos^2 V - \sin^2 U \sin^2 V\\ &\qquad = (1 - \sin^2 U)(1 - \sin^2 V) - \sin^2 U \sin^2 V\\ &\qquad = 1 - (\sin^2 U + \sin^2 V),\end{aligned}\right.$$

se réduisent simplement à

$$\left\{\begin{aligned}\sin^2\psi + \cos^2 i\varpi &= 1 + \sin U \sin V\\ \sin^2\psi . \cos^2 i\varpi &= \frac{1}{4}\left[1 + 2\sin U \sin V - \{1 - (\sin^2 U + \sin^2 V)\}\right]\\ &= \frac{1}{4}(\sin U + \sin V)^2;\end{aligned}\right.$$

d'où il suit que l'équation demandée sera

$$(90) \qquad t^2 - (1 + \sin U \sin V).t + \frac{1}{4}(\sin U + \sin V)^2 = 0.$$

Or, les premières formules (88) et les définitions (69) donnant

$$\left\{\begin{aligned}&\sin U = \frac{u}{l}, \qquad \sin V = \frac{v}{l},\\ &\sin U \sin V = \frac{uv}{l^2} = \frac{x^2+y^2}{l^2}, \qquad \sin U + \sin V = \frac{u+v}{l} = \frac{2x}{l},\end{aligned}\right.$$

la même équation deviendra, étant exprimée en x et y, au lieu de U et V,

$$t^2 - \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right).t + \frac{1}{4}\frac{4x^2}{l^2} = 0,$$

ou

$$(90^{\text{bis}}) \qquad l^2t^2 - (l^2 + x^2 + y^2).t + x^2 = 0,$$

puis, étant ordonnée par rapport à x et y,

$$(1 - t)\,x^2 - ty^2 = l^2t\,(1 - t),$$

ou enfin, étant divisée par le produit $t(1 - t)$,

$$\frac{x^2}{t} - \frac{y^2}{1 - t} = l^2.$$

Cela posé, ses deux racines étant, d'après la manière même dont nous l'avons formée, $\sin^2\psi$ et $\cos^2 i\varpi$, nous aurons donc séparément les deux équations

$$\frac{x^2}{\sin^2\psi} - \frac{y^2}{\cos^2\psi} = l^2, \qquad \frac{x^2}{\cos^2 i\varpi} - \frac{y^2}{\sin^2 i\varpi} = l^2,$$

qui se confondent manifestement, en raison des définitions $\operatorname{csh} z = \cos iz$ et $\operatorname{snh} z = \frac{1}{i}\sin iz$, avec les deux équations (89bis).

Il est évident, d'ailleurs, qu'en résolvant ces mêmes équations par rapport à x et y, on retrouvera pour ces deux coordonnées les expressions (89), d'où nous avons déduit tout à l'heure les dites équations (89bis).

3° Prenons encore dans les formules (72), avec la valeur $c = 1$ de la constante qui y figure, pour les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la même fonction réelle, savoir

$$(91) \qquad \mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t) = \log\frac{t + c}{t - c},$$

qui donneront par conséquent

$$(91^{\text{bis}}) \qquad \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u) = \log\frac{u + c}{u - c}, \qquad \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v) = \log\frac{v + c}{v - c}.$$

On aura dans ce cas, en premier lieu, par les dites formules (72),

$$(92)\quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u)+\mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2}\log\frac{(u+c)(v+c)}{(u-c)(v-c)} = \frac{1}{2}\log\frac{uv+c(u+v)+c^2}{uv-c(u+v)+c^2}, \\ \varpi = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}_1(u)-\mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2i}\log\frac{(u+c)(v-c)}{(u-c)(v+c)} = \frac{1}{2i}\log\frac{uv-c(u-v)-c^2}{uv+c(u-v)-c^2} \end{cases}$$

et par conséquent

$$\frac{uv+c^2+c(u+v)}{uv+c^2-c(u+v)} = \frac{e^{2\psi}}{1}, \qquad \frac{uv-c^2-c(u-v)}{uv-c^2+c(u-v)} = \frac{e^{2i\varpi}}{1},$$

d'où l'on conclura immédiatement

$$(93)\quad \begin{cases} \dfrac{uv+c^2}{c(u+v)} = \dfrac{e^{2\psi}+1}{e^{2\psi}-1} = \dfrac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{e^{\psi}-e^{-\psi}} = \dfrac{2\,\mathrm{csh}\,\psi}{2\,\mathrm{snh}\,\psi} = \dfrac{1}{\mathrm{tgh}\,\psi}, \\ \dfrac{uv-c^2}{-c(u-v)} = \dfrac{e^{2i\varpi}+1}{e^{2i\varpi}-1} = \dfrac{e^{i\varpi}+e^{-i\varpi}}{e^{i\varpi}-e^{-i\varpi}} = \dfrac{2\cos\varpi}{2i\sin\varpi} = \dfrac{1}{i\,\mathrm{tang}\,\varpi}. \end{cases}$$

D'ailleurs, les quantités u et v (69) donnant évidemment

$$(94)\quad \begin{cases} u+v=2x, \qquad u-v=-2iy, \qquad uv=x^2+y^2, \\ u^2+v^2=2(x^2-y^2), \qquad u^2-v^2=-4ixy, \end{cases}$$

les équations (93), qui représentent celles des deux familles de cylindres, sont donc, en x et y,

$$\frac{x^2+y^2+c^2}{c.2x} = \frac{1}{\mathrm{tgh}\,\psi}, \qquad \frac{x^2+y^2-c^2}{c.2iy} = \frac{1}{i\,\mathrm{tang}\,\varpi},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(95)\qquad x^2+y^2+c^2=\frac{2cx}{\mathrm{tgh}\,\psi}, \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2-c^2=\frac{2cy}{\mathrm{tang}\,\varpi}.$$

Les deux familles de cylindres sont par conséquent dans ce cas toutes deux à base circulaire, et ont constamment leurs axes de révolution, l'une dans le plan des zx, l'autre dans le plan des yz.

En second lieu, la première des équations (91bis) donnant inversement

$$\frac{u+c}{u-c}=\frac{e^{\mathrm{U}}}{1}, \qquad \frac{u}{c}=\frac{e^{\mathrm{U}}+1}{e^{\mathrm{U}}-1}=\frac{e^{\frac{1}{2}\mathrm{U}}+e^{-\frac{1}{2}\mathrm{U}}}{e^{\frac{1}{2}\mathrm{U}}-e^{-\frac{1}{2}\mathrm{U}}}=\frac{2\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{2\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}},$$

les fonctions réciproques des fonctions (91bis) seront donc

$$u=f_1(\mathrm{U})=c\,\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}, \qquad v=f_2(\mathrm{V})=c\,\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}},$$

et par suite, étant remises dans les formules (65), fourniront, pour les coordonnées rectilignes x et y, les expressions

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[f_1(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V})\right]=\dfrac{c}{2}\left[\dfrac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}+\dfrac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}\right], \\ y=\dfrac{i}{2}\left[f_1(\mathrm{U})-f_2(\mathrm{V})\right]=\dfrac{ic}{2}\left[\dfrac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}}-\dfrac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}\right], \end{cases}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{cases} x= c\,\dfrac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{V}+\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{2\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}= c\,\dfrac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\operatorname{csh}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})-\operatorname{csh}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})} \\ y=-ic\,\dfrac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{V}-\operatorname{csh}\frac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}{2\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{snh}\frac{1}{2}\mathrm{V}}=-ic\,\dfrac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\operatorname{csh}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})-\operatorname{csh}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, eu égard aux définitions (57) de U et V, dans lesquelles nous avons fait par hypothèse $c=1$,

$$x=\frac{c\operatorname{snh}\psi}{\operatorname{csh}\psi-\operatorname{csh}i\varpi}, \qquad y=\frac{-c.i\operatorname{snh}i\varpi}{\operatorname{csh}\psi-\operatorname{csh}i\varpi},$$

ou, plus simplement,

$$x=\frac{c\operatorname{snh}\psi}{\operatorname{csh}\psi-\cos\varpi}, \qquad y=\frac{c\sin\varpi}{\operatorname{csh}\psi-\cos\varpi},$$

valeurs qui coïncident bien, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, avec celles que l'on trouverait par la résolution des équations (95) obtenues en premier lieu.

4° Prenons enfin, en terminant, toujours dans les mêmes formules (72), avec la valeur $c = 1$ de la constante, pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, encore une même fonction réelle, qui sera cette fois

$$(96) \qquad \mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t) = \log \frac{c^2}{t^2 - c^2},$$

et donnera par suite

$$(97) \qquad \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u) = \log \frac{c^2}{u^2 - c^2}, \qquad \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v) = \log \frac{c^2}{v^2 - c^2}.$$

Ces mêmes formules (72) donneront alors en premier lieu

$$(98) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2}\log \frac{c^4}{(u^2 - c^2)(v^2 - c^2)}, \\ \varpi &= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2i}\log \frac{v^2 - c^2}{u^2 - c^2}, \end{aligned} \right.$$

et par conséquent

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{c^4}{(u^2 - c^2)(v^2 - c^2)} = e^{2\psi} \quad \text{ou} \quad u^2v^2 - c^2(u^2 + v^2) + c^4 = c^4e^{-2\psi}, \\ &\frac{v^2 - c^2}{u^2 - c^2} = \frac{e^{2i\varpi}}{1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{v^2 - c^2 - (u^2 - c^2)}{v^2 - c^2 + (u^2 - c^2)} = \frac{e^{2i\varpi} - 1}{e^{2i\varpi} + 1} = \frac{e^{i\varpi} - e^{-i\varpi}}{e^{i\varpi} + e^{-i\varpi}}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire plus simplement, quant à la dernière équation,

$$\frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2 - 2c^2} = \frac{2i \sin \varpi}{2 \cos \varpi} = i \operatorname{tang} \varpi,$$

équations qui équivalent en conséquence, eu égard aux valeurs (94) calculées toutes ensemble à l'occasion de l'exemple précédent, aux deux suivantes en x et y

$$(99) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = c^4(e^{-2\psi} - 1), \\ &\frac{4ixy}{2(x^2 - y^2) - 2c^2} = i \operatorname{tang} \varpi, \end{aligned} \right.$$

ou, plus clairement, quant à la seconde, en chassant le dénominateur,

$$x^2 - y^2 - 2\frac{xy}{\tan \varpi} = c^2. \tag{100}$$

De ces deux équations, qui sont celles des sections droites des deux familles de cylindres, la première représente une famille de courbes fermées, rétrécies dans leur partie médiane, rappelant un peu comme forme celle de la lemniscate, à laquelle elles se réduisent pour la valeur du paramètre $\psi = 0$; la seconde est une famille d'hyperboles équilatères, parmi lesquelles celle qui correspond au paramètre $\varpi = \frac{\pi}{2}$ a pour asymptotes les bissectrices des angles formés par les axes des coordonnées rectilignes, qui sont précisément, comme l'on sait, les tangentes au point double de la lemniscate que nous venons de spécifier dans la famille ψ pour la valeur du paramètre $\psi = 0$.

En second lieu, la première des équations (97) donnant inversement

$$\frac{c^2}{u^2 - c^2} = e^{\mathrm{U}}, \qquad \text{d'où} \qquad u^2 = c^2(1 + e^{-\mathrm{U}}),$$

les fonctions réciproques des fonctions (97) sont donc, dans le cas actuel,

$$u = f_1(\mathrm{U}) = c\sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}}}, \qquad v = f_2(\mathrm{V}) = c\sqrt{1 + e^{-\mathrm{V}}}, \tag{101}$$

dans lesquelles on aura, d'après l'hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned} e^{-\mathrm{U}} &= e^{-(\psi + i\varpi)} = e^{-\psi} \cdot e^{-i\varpi} = e^{-\psi}(\cos\varpi - i\sin\varpi), \\ e^{-\mathrm{V}} &= e^{-(\psi - i\varpi)} = e^{-\psi} \cdot e^{i\varpi} \ = e^{-\psi}(\cos\varpi + i\sin\varpi). \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Les formules (65) donneront par conséquent, en y remettant d'abord les valeurs précédentes (101),

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left[f_1(\mathrm{U}) + f_2(\mathrm{V})\right] = \frac{c}{2}\left(\sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}}} + \sqrt{1 + e^{-\mathrm{V}}}\right), \\ y &= \frac{i}{2}\left[f_1(\mathrm{U}) - f_2(\mathrm{V})\right] = \frac{ic}{2}\left(\sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}}} - \sqrt{1 + e^{-\mathrm{V}}}\right). \end{aligned}\right.$$

puis, en élevant au carré,

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2}{4}\left[1 + e^{-U} + 1 + e^{-V} + 2\sqrt{(1 + e^{-U})(1 + e^{-V})}\right], \\ &= \frac{c^2}{2}\left[1 + \tfrac{1}{2}(e^{-U} + e^{-V}) + \sqrt{1 + e^{-U} + e^{-V} + e^{-(U+V)}}\right], \\ y^2 &= \frac{-c^2}{4}\left[1 + e^{-U} + 1 + e^{-V} - 2\sqrt{(1 + e^{-U})(1 + e^{-V})}\right], \\ &= \frac{c^2}{2}\left[-1 - \tfrac{1}{2}(e^{-U} + e^{-V}) + \sqrt{1 + e^{-U} + e^{-V} + e^{-(U+V)}}\right], \end{aligned}\right.$$

ou définitivement, en substituant les valeurs (102), puis extrayant alors les racines,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + e^{-\psi}\cos\varpi + \sqrt{1 + e^{-2\psi} + 2e^{-\psi}\cos\varpi}}, \\ y &= \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{-(1 + e^{-\psi}\cos\varpi) + \sqrt{1 + e^{-2\psi} + 2e^{-\psi}\cos\varpi}}, \end{aligned}\right.$$

expressions qui coïncident bien encore avec celles que l'on obtiendrait, moins facilement toutefois, par la résolution seule des équations précédemment acquises (99) et (100).

Ces deux derniers exemples sont empruntés à Lamé, qui les rencontre et obtient les diverses équations, successivement déduites de nos formules dans ce qui précède, par un procédé absolument différent (*), et décrit minutieusement ensuite le tracé

(*) Partant de ce fait analytique très connu, que le système linéaire

$$(\alpha) \qquad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{d\varpi}{dy}, \qquad \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx},$$

constitue une intégrale première de notre système du second ordre (74), et est complètement équivalent à notre système du premier ordre (49) (abstraction faite de l'équation intermédiaire), à la condition toutefois d'y restreindre la constante c à la seule valeur $c = 1$, puis remarquant, ce dont il est bien facile de s'assurer, que les deux expressions de ψ et ϖ

$$\psi = \log\frac{C}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}, \qquad \varpi = \text{arc tang}\,\frac{y - b}{x - a},$$

graphique et les propriétés géométriques remarquables des courbes formant les sections droites des familles de cylindres correspondantes, c'est-à-dire celles représentées par les équations (95), (99) et (100) ci-dessus (*Coordon. Curv.*, §§ CX-CXIII, pp. 199-206, et CXIX-CXXIII, pp. 217-227).

---

dans lesquelles a, b, C sont trois constantes quelconques, forment une solution particulière dudit système (α), Lamé exprime alors l'intégrale générale de ce même système, suivant le procédé habituel de la Physique Mathématique, à l'aide de séries composées d'un même nombre illimité de termes, correspondants chacun à chacun pour les deux expressions, telles que

$$(6) \qquad \psi = \Sigma A \log \frac{C}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}, \qquad \varpi = \Sigma A \text{ arc tang } \frac{y-b}{x-a},$$

le coefficient A, de même que les trois constantes a, b, C, pouvant varier d'un terme au suivant dans chaque série.

Cela posé, Lamé obtient les deux exemples 3° et 4°, que nous déduisons ci-dessus des formules de notre théorie, en limitant à deux seulement le nombre des termes de chaque série, supposant de plus que le coefficient C ait la même valeur $C = c$ pour ces deux termes, et prenant enfin pour les constantes a et b, dans le premier terme, les valeurs $a = -c$, $b = 0$, et dans le second les valeurs $a = c$, $b = 0$.

Si, en outre de ces conditions communes aux deux exemples, l'on prend en premier lieu $A_1 = -A_2 = 1$, les formules précédentes (6) redonnent, comme on le reconnaît aisément à l'aide des égalités (94) et des divers calculs que nous avons fondés sur ces égalités, les expressions (92) de ψ et ϖ correspondant aux hypothèses (91) de notre exemple 3°; et si l'on y prend, en second lieu, $A_1 = A_2 = 1$, on retrouvera de la même façon celles (98) correspondant aux hypothèses (96) de notre exemple 4° (*Coordonn. Curv.*, §§ CIX, p. 199, et CXIX, p. 217). Puis, cela fait, Lamé obtient les expressions réciproques de x et y, non pas comme nous le faisons par l'application de formules générales, mais seulement par la résolution des mêmes équations, qui est rendue possible dans ces deux cas par le très petit nombre des termes des séries.

En admettant même que la solution (6) de Lamé, sous forme de séries illimitées, présente effectivement le même degré de généralité que celle exprimée par nos formules (73) ou (67), ce qui n'est pas exact, au pied de la lettre, du moment que les équations linéaires (α), d'où elle est tirée, supposent dans les équations originaires (49) de notre théorie, avons-nous dit, la restriction $c = 1$, on jugera sans doute que les formules de notre théorie sont d'une application notablement plus pratique et plus facile, puisqu'elles fournissent immédiatement dans tous les cas, à volonté l'expression, soit des coordonnées curvilignes, soit des coordonnées rectilignes, tandis que la solution précitée (6) de Lamé ne donne que les premières seulement, la résolution de ces mêmes équations par rapport à x et y étant évidemment impossible, en général, avec une pareille forme de solution : considération qui nous fera pardonner, nous l'espérons, l'étendue des développements que nous avons été amené à attribuer dans notre travail à cette question si connue des Systèmes Cylindriques à la fois orthogonaux et isothermes.

Système classique des coordonnées sphériques. — IV° « *Trois des mêmes dérivées seulement sont supposées nulles* ». Il est aisé de voir tout d'abord que parmi ces dérivées il faudra nécessairement supposer qu'il y en ait deux qui soient conjuguées.

En effet, comme on ne peut supposer que ces dérivées appartiennent toutes trois au même groupe, puisque, d'après l'équation (15), il y en aurait nécessairement une quatrième nulle également parmi celles de l'autre groupe, admettons pour un instant que chacune de ces dérivées appartienne à une colonne verticale différente du tableau (12), et qu'elles soient, pour fixer les idées,

$$\frac{R}{\varphi} = 0, \qquad \frac{R}{\psi} = 0, \qquad \frac{Q}{\varpi} = 0.$$

La seconde des équations du premier ordre (13), se réduisant alors par ces hypothèses à $R \frac{P}{\varpi} \frac{Q}{\varphi} = 0$, ne pourra plus être vérifiée : et de même pour toutes les autres suppositions analogues. Et par conséquent, pour qu'il existe une solution du problème, il faut nécessairement supposer que parmi les trois dérivées qui sont nulles, deux appartiennent à la même colonne verticale du tableau (12), c'est-à-dire soient conjuguées.

Ce premier point admis, on pourra dès lors distinguer de nouveau deux hypothèses subsidiaires, suivant que parmi les mêmes dérivées il y en aura, ou non, deux qui soient réciproques. Or, on reconnaît encore de suite que la première de ces deux suppositions ne peut non plus donner naissance à aucune solution, car si l'on se donne, par exemple,

$$\frac{R}{\varphi} = 0, \qquad \frac{Q}{\varphi} = 0, \qquad \frac{R}{\psi} = 0,$$

la première des équations du premier ordre (13) se réduira encore à $R \frac{P}{\psi} \frac{Q}{\varpi} = 0$, et ne pourra être vérifiée avec ces hypothèses.

La seule supposition relative à ce Cas IV° qui puisse fournir

initial M_0, puisqu'en aucun de ses points elle ne pourra faire un angle fini avec la direction de ce plan. D'où il suit que la trace en question est un petit cercle ayant cette droite D pour axe, et par conséquent enfin la famille ϖ se composera de cônes de révolution, ayant pour sommet le centre des sphères ψ, et pour axe la droite D commune à tous les plans φ.

On arrivera, sans plus de difficulté, à la même conclusion par la seconde voie, en partant simultanément des deux équations

$$(108) \qquad (\alpha\lambda_1 - a)x + (6\lambda_1 - b)y + (\gamma\lambda_1 - c)z + \delta\lambda_1 - d = 0$$

et

$$(109) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda_2$$

que donnent les deux formes d'équation les plus générales (57) et (74) du Chapitre II relatives aux familles isothermes de plans et de sphères, respectivement pour les équations des deux familles φ et ψ, et exprimant qu'elles vérifient les trois équations de droite (21) ; car si l'on fait pour un instant, comme dans l'équation (132) du Chapitre II et les suivantes,

$$D = \alpha x + 6y + \gamma z + \delta,$$

la différentiation de l'équation (108) par rapport à x, y, z donnant comme alors

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{\alpha\lambda_1 - a}{D}, \qquad \frac{d\lambda_1}{dy} = -\frac{6\lambda_1 - b}{D}, \qquad \frac{d\lambda_1}{dz} = -\frac{\gamma\lambda_1 - c}{D},$$

on voit que la condition d'orthogonalité de ces deux familles φ et ψ, qui est, avec les formes d'équation (108) et (109),

$$\frac{d\lambda_1}{dx}\frac{d\lambda_2}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dy}\frac{d\lambda_2}{dy} + \frac{d\lambda_1}{dz}\frac{d\lambda_2}{dz} = 0,$$

se réduira simplement, dans le cas actuel, à

$$-\left[(\alpha\lambda_1 - a)x + (6\lambda_1 - b)y + (\gamma\lambda_1 - c)z\right] = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en vertu de l'équation (108) elle-même, à

$$\delta\lambda_1 - d = 0,$$

laquelle équation, devant être vérifiée quel que soit λ_1, exigera que l'on ait séparément $\delta = 0$, et $d = 0$, c'est-à-dire que tous les plans φ (108) contiendront une même droite passant par l'origine, centre des sphères ψ.

Semblablement la condition d'orthogonalité des surfaces ϖ avec les surfaces ψ ou λ_2, qui peut être écrite

$$\frac{d\lambda_2}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\lambda_2}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\lambda_2}{dz}\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

sera, eu égard à l'expression du paramètre λ_2 fournie par l'équation (109),

$$x\frac{d\varpi}{dx} + y\frac{d\varpi}{dy} + z\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

équation dont l'intégrale étant donnée par le système simultané

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{d\varpi}{0},$$

sera l'équation

$$(110) \qquad \varpi = f(u, v), \qquad \text{où} \qquad u = \frac{x}{z}, \qquad v = \frac{y}{z};$$

et dès lors les surfaces ϖ sont des cônes ayant pour sommet l'origine, c'est-à-dire le centre commun des sphères.

Enfin, en dernier lieu, pour définir la nature de ces cônes, si nous choisissons encore la direction des axes, comme dans le Cas II°, en prenant pour axe des z la droite par laquelle passent tous les plans φ, de manière à mettre leur équation sous la forme simplifiée (25), la condition de leur orthogonalité avec les cônes de la famille ϖ, qui sera de même, en la multipliant par le facteur $\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}$,

$$\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varpi}{dz}\right) = 0,$$

si l'on a égard aux valeurs (26) des dérivées de φ, et à celles des dérivées de ϖ qui résultent des équations (110), savoir

$$\frac{d\varpi}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d\varpi}{du}\frac{1}{z}, \qquad \frac{d\varpi}{dy}=\frac{df}{dv}\frac{dv}{dy}=\frac{d\varpi}{dv}\frac{1}{z},$$

deviendra simplement encore dans le Cas actuel, comme lors du Cas II°,

$$y\frac{d\varpi}{du}-x\frac{d\varpi}{dv}=0 \qquad \text{ou} \qquad v\frac{d\varpi}{du}-u\frac{d\varpi}{dv}=0,$$

et donnera par suite, en intégrant, comme pour l'équation (28),

$$u^2+v^2=\Pi(\varpi) \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2+y^2}{z^2}=\Pi(\varpi),$$

c'est-à-dire que les cônes composant cette troisième famille ϖ seront de révolution autour de l'axe des z ou de la droite commune à tous les plans φ.

La solution pour ce Cas IV° se composera donc exclusivement d'une famille de sphères concentriques, d'une famille de plans méridiens, passant tous par une même droite menée par le centre des sphères, et d'une famille de cônes de révolution autour de cette même droite. C'est par conséquent le système classique des *Coordonnées Sphériques* ou *Polaires*, qui constitue à lui seul la solution, dans ce Cas, résultat strictement délimité, qui n'était nullement à prévoir par le seul fait que ce système connu devait manifestement être compris dans la solution, et qu'il y avait intérêt dès lors à établir rigoureusement, ainsi que nous croyons l'avoir fait à l'aide des calculs et des raisonnements que nous venons de présenter (*).

(*) Cette démonstration eût été de nouveau fort difficile, sinon impossible, aussi bien par un mode de raisonnement que par l'autre, si nous n'avions commencé par mettre en évidence la propriété caractéristique des plans constituant une famille isotherme, savoir de passer tous par une même droite, ou, ce qui revient au même, leur forme d'équation *la plus générale* (57), établie dans notre Chapitre II, et que nous avons formulée en théorème sous le numéro I (p. 118).

La partie la plus importante de la solution étant ainsi obtenue, si l'on veut à présent en pousser jusqu'au bout le développement, c'est-à-dire déterminer exactement les équations en termes finis qui lient, dans le Cas actuel, les coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ aux coordonnées rectilignes x, y, z, comme, en supposant ce dernier point obtenu, les trois surfaces qui composent le système se trouveront alors, par ces équations mêmes, rapportées simultanément à leurs paramètres thermométriques, on pourrait, en visant ce but, avoir la pensée de recourir, pour achever la solution du problème, à la méthode générale de Lamé que nous avons indiquée dans notre Chapitre II pour cet objet. Mais ce procédé, suffisant à la vérité pour conduire à la forme des équations demandées, ne fournirait pas en toute certitude la solution complète de la question spéciale que nous avons actuellement en vue, attendu qu'elle laisserait forcément de côté les relations qui pourraient exister, par la nature même du problème, entre les différentes constantes, introduites par les intégrations isolées relatives à chaque surface, et ne permettraient pas d'apprécier dès lors combien il en subsiste de réellement arbitraires. C'est pourquoi il vaudra mieux avoir recours, pour cela, au trois équations de gauche (21) qui restent encore à vérifier, comme nous l'avons fait à propos du Cas II° (pages 147-149), en calculant séparément pour ces équations, d'une part, les valeurs des seconds membres résultant dans le Cas actuel des hypothèses (103), et, d'autre part, pour les premiers membres, celles auxquelles donneraient naissance les équations des trois familles de surfaces rencontrées tout à l'heure comme solution, savoir (*) :

$$(111) \qquad \frac{y}{x} = \Phi(\varphi), \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \Psi(\psi), \qquad \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \Pi(\varpi).$$

(*) Nous pourrions évidemment pour ce Cas encore, de même que pour le Cas II°, en attribuant dès maintenant aux deux familles φ et ψ les deux équations les plus générales (69) et (75), trouvées dans le Chapitre précédent pour les familles isothermes de plans et de sphères, déterminer alors *sans nouvelle intégration*, et à l'aide de simples identifications imposées par les trois équations que nous venons de dire, l'équation exacte de la

Pour cela, il sera nécessaire de déterminer tout d'abord les trois fonctions P, Q, R, à l'aide des trois équations ci-dessus (106), (107) et (105). A cet effet, la première étant écrite successivement sous les diverses formes qui suivent,

$$2\left[P\frac{P''}{\psi^2}-\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2\right]=\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2, \qquad \text{ou} \qquad 2\frac{P\frac{P''}{\psi^2}-\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2}{P^2}=\left(\frac{1}{P}\frac{P'}{\psi}\right)^2,$$

ou encore

$$2\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{P}\frac{P'}{\psi}\right)=\left(\frac{1}{P}\frac{P'}{\psi}\right)^2, \qquad \text{ou enfin} \qquad \frac{\frac{d^2.lP}{d\psi^2}}{\left(\frac{d.lP}{d\psi}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

donnera dès lors, en l'intégrant une première fois,

$$-\frac{1}{\frac{d.lP}{d\psi}}=\frac{1}{2}(\psi+c') \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}d.\,lP=-\frac{d\psi}{\psi+c'},$$

puis, en l'intégrant une seconde fois,

$$(112) \qquad l\sqrt{P}=-l(\psi+c')-lc \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{P}=\frac{1}{c(\psi+c')};$$

d'où enfin, en ayant recours également à l'équation (105),

$$(113) \qquad P=\frac{1}{c^2(\psi+c')^2} \qquad \text{et} \qquad R=\frac{C^2}{c^2(\psi+c')^2}.$$

---

troisième famille ϖ, ainsi que le nombre précis et le rôle des constantes réellement arbitraires qui subsisteront dans les trois équations définitives. Mais le calcul n'étant ni plus long, ni plus difficile, mais étant beaucoup plus symétrique, en traitant les trois surfaces sur le pied d'égalité, nous poursuivrons cette recherche pour les trois surfaces à la fois, sans supposer connu aucun des résultats établis antérieurement dans notre Chapitre II, et que nous venons de rappeler.

ou, ce qui est la même chose, en vertu de l'équation (108) elle-même, à

$$\delta\lambda_1 - d = 0,$$

laquelle équation, devant être vérifiée quel que soit λ_1, exigera que l'on ait séparément $\delta = 0$, et $d = 0$, c'est-à-dire que tous les plans φ (108) contiendront une même droite passant par l'origine, centre des sphères ψ.

Semblablement la condition d'orthogonalité des surfaces ϖ avec les surfaces ψ ou λ_2, qui peut être écrite

$$\frac{d\lambda_2}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\lambda_2}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\lambda_2}{dz}\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

sera, eu égard à l'expression du paramètre λ_2 fournie par l'équation (109),

$$x\frac{d\varpi}{dx} + y\frac{d\varpi}{dy} + z\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

équation dont l'intégrale étant donnée par le système simultané

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{d\varpi}{0},$$

sera l'équation

(110) $\quad \varpi = f(u, v), \qquad$ où $\qquad u = \frac{x}{z}, \qquad v = \frac{y}{z};$

et dès lors les surfaces ϖ sont des cônes ayant pour sommet l'origine, c'est-à-dire le centre commun des sphères.

Enfin, en dernier lieu, pour définir la nature de ces cônes, si nous choisissons encore la direction des axes, comme dans le Cas II°, en prenant pour axe des z la droite par laquelle passent tous les plans φ, de manière à mettre leur équation sous la forme simplifiée (25), la condition de leur orthogonalité avec les cônes de la famille ϖ, qui sera de même, en la multipliant par le facteur $\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}$,

$$\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varpi}{dz}\right) = 0,$$

et qui donnera dès lors, par une seconde intégration, celle-ci (*)

$$\frac{1}{Q} - \frac{c^2}{2a^2} = \frac{c^2}{2a^2} \operatorname{csh}(-2a\varpi - 2b) = \frac{c^2}{2a^2} \operatorname{csh} 2(a\varpi + b),$$

(*) Les deux équations

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

admettent respectivement pour intégrales

$$z = a \operatorname{snh}(x + x) \qquad \text{et} \qquad z = a \operatorname{csh}(x + \alpha).$$

En effet, si on les écrit simultanément ainsi

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \frac{\frac{dz}{a}}{\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 \pm 1}},$$

on trouvera en intégrant par quadrature

$$x + \alpha = \log\left(\frac{z}{a} + \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 \pm 1}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$e^{x+\alpha} = \frac{z}{a} + \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 \pm 1},$$

d'où l'on conclura

$$e^{-(x+\alpha)} = \frac{1}{\frac{z}{a} + \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 \pm 1}} = \frac{\frac{z}{a} - \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 \pm 1}}{\frac{z^2}{a^2} - \left(\frac{z^2}{a^2} \pm 1\right)} = \mp\left(\frac{z}{a} - \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 \pm 1}\right),$$

les doubles signes qui sont devant la parenthèse correspondant respectivement à ceux qui sont sous le radical. En prenant donc d'abord les signes supérieurs, qui correspondent à la première équation différentielle proposée, on aura, en retranchant l'une de l'autre les deux équations qui précèdent,

$$e^{x+\alpha} - e^{\ (x+\alpha)} = 2\frac{z}{a} \qquad \text{ou} \qquad z = a \operatorname{snh}(x + \alpha),$$

et, en prenant ensuite les signes inférieurs qui correspondent à la seconde équation, et ajoutant, on obtiendra semblablement

$$e^{x+\alpha} + e^{-(x+\alpha)} = 2\frac{z}{a} \qquad \text{ou} \qquad z = a \operatorname{csh}(x + \alpha),$$

ainsi que nous venons de l'énoncer.

de laquelle on tirera ensuite

$$\frac{1}{Q}=\frac{c^2}{2a^2}\left[1+\operatorname{csh} 2(a\varpi+b)\right]=\frac{c^2}{2a^2}.2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b),$$

c'est-à-dire définitivement, en résolvant par rapport à Q,

$$(117)\qquad Q=\frac{a^2}{c^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)},$$

laquelle valeur, étant rapprochée de celles (113) de P et de R, fournira dès lors, pour le but que nous avons dit tout à l'heure, les expressions demandées, relatives au Cas actuel, des seconds membres des trois équations de gauche (21).

A cet effet, en vue de simplifier l'écriture de ces expressions, nous introduirons à la place des deux constantes c et c' les deux nouvelles constantes $m=c^2$ et $n=c^2c'$, et alors, ayant par ce moyen

$$c^4(\psi+c')^2=(c^2\psi+c^2c')^2=(m\psi+n)^2,$$

les trois expressions que nous venons de dire seront par conséquent

$$(118)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{QR}=\dfrac{c^4}{C^2a^2}(\psi+c')^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)=\dfrac{1}{C^2a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b), \\ \dfrac{1}{RP}=\dfrac{c^4}{C^2}(\psi+c')^4=\dfrac{1}{C^2c^4}(c^2\psi+c^2c')^4=\dfrac{1}{C^2m^2}(m\psi+n)^4, \\ \dfrac{1}{PQ}=\dfrac{c^4}{a^2}(\psi+c')^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)=\dfrac{1}{a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b). \end{cases}$$

Cela fait, en venant d'un autre côté aux équations (111) des trois surfaces que nous venons d'obtenir, on tirera de la première et de la troisième

$$(119)\qquad y=x\,\Phi(\varphi),\qquad x^2+y^2=z^2\Pi(\varpi),\qquad x^2\left[1+\Phi^2(\varphi)\right]=z^2\Pi(\varpi),$$

et, en reportant dans la seconde,

$$(120) \qquad z^2\left[\Pi(\varpi)+1\right]=\Psi(\psi), \qquad \text{d'où} \qquad z^2=\frac{\Psi(\psi)}{1+\Pi(\varpi)},$$

puis enfin, en remettant cette dernière valeur de z^2 dans la dernière équation précédente (119),

$$(121) \qquad x^2(1+\Phi^2)=\frac{\Psi\Pi}{1+\Pi}, \qquad \text{d'où} \qquad x^2=\frac{\Psi\Pi}{(1+\Phi^2)(1+\Pi)}.$$

Par ailleurs, en différentiant les mêmes équations (111), on trouvera sans peine, comme lors du Cas II° ci-dessus (page 147),

$$\left\{\begin{array}{llll}
\Phi'\dfrac{d\varphi}{dx}=-\dfrac{y}{x^2}, & \Phi'\dfrac{d\varphi}{dy}=\dfrac{1}{x}, & \Phi'\dfrac{d\varphi}{dz}=0, & \Phi'^2\Delta_1^2\varphi=\dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right), \\
\Psi'\dfrac{d\psi}{dx}=2x, & \Psi'\dfrac{d\psi}{dy}=2y, & \Psi'\dfrac{d\psi}{dz}=2z, & \Psi'^2\Delta_1^2\psi=4(x^2+y^2+z^2), \\
\Pi'\dfrac{d\varpi}{dx}=\dfrac{2x}{z^2}, & \Pi'\dfrac{d\varpi}{dy}=\dfrac{2y}{z^2}, & \Pi'\dfrac{d\varpi}{dz}=-2\dfrac{x^2+y^2}{z^3}, & \Pi'^2\Delta_1^2\varpi=\dfrac{4}{z^2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}+\dfrac{(x^2+y^2)^2}{z^4}\right)
\end{array}\right.$$

d'où l'on conclura pour chaque famille, en ayant égard à leurs équations (111) et aux valeurs précédentes (121) et (120) de x^2 et z^2,

$$\left\{\begin{array}{ll}
\Phi'^2\Delta_1^2\varphi=\dfrac{(1+\Phi^2)(1+\Pi)}{\Psi\Pi}(1+\Phi^2), & \text{d'où} \quad \Delta_1^2\varphi=\dfrac{(1+\Phi^2)^2(1+\Pi)}{\Phi'^2\Psi\Pi}, \\
\Psi'^2\Delta_1^2\psi=4\Psi, & \quad \text{»} \quad \Delta_1^2\psi=\dfrac{4\Psi}{\Psi'^2}, \\
\Pi'^2\Delta_1^2\varpi=\dfrac{4(1+\Pi)}{\Psi}(\Pi+\Pi^2) & \quad \text{»} \quad \Delta_1^2\varpi=\dfrac{4\Pi(1+\Pi)^2}{\Psi\Pi'^2}.
\end{array}\right.$$

En identifiant dès lors, pour satisfaire aux équations de gauche (21), avec les expressions précédentes (118), ces valeurs de $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, c'est-à-dire des premiers membres de ces mêmes équations, il faudra donc que l'on ait dans le Cas actuel :

$$(122)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{C^2a^2}(m\psi+n)^2 \operatorname{csh}^2(a\varpi+b) = \left(\dfrac{1+\Phi^2}{\Phi'}\right)^2 \dfrac{1+\Pi}{\Psi\Pi}, \\[2ex] \dfrac{1}{C^2m^2}(m\psi+n)^4 = \dfrac{4\Psi}{\Psi'^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\Psi'}{2\sqrt{\Psi}}\right)^2}, \\[2ex] \dfrac{1}{a^2}(m\psi+n)^2 \operatorname{csh}^2(a\varpi+b) = \dfrac{4\Pi(1+\Pi)^2}{\Psi\Pi'^2} = \dfrac{4}{\Psi}\dfrac{1}{\Pi}\left(\dfrac{1+\Pi}{\Pi}\right)^2 \dfrac{1}{\left(-\dfrac{\Pi'}{\Pi^2}\right)^2}. \end{cases}$$

Or, il est évident que la première de ces équations équivaudra aux deux suivantes

$$\left(\frac{\Phi'}{1+\Phi^2}\right)^2 = \frac{C^2}{(m\psi+n)^2\Psi} \quad \frac{a^2(1+\Pi)}{\Pi \operatorname{csh}^2(a\varpi+b)} = \alpha^2,$$

α désignant une nouvelle constante, car les deux premiers membres, étant exclusivement fonctions de variables indépendantes différentes, ne pourront rester égaux pour toutes les valeurs de ces variables, que si cette valeur commune est elle-même une constante. Cela posé, cette dernière suite d'équations donnera séparément, de nouveau et pour la même raison,

$$\frac{\Phi'}{1+\Phi^2} = \alpha, \qquad \text{et} \qquad \frac{a^2(1+\Pi)}{\Pi \operatorname{csh}^2(a\varpi+b)} = \frac{\alpha^2}{C^2}(m\psi+n)^2\Psi = C'^2,$$

d'où l'on tirera

$$(123)\quad \begin{cases} \operatorname{arc\,tang}\Phi = \alpha\varphi + \beta, & \text{d'où} \quad \Phi(\varphi) = \operatorname{tang}(\alpha\varphi+\beta), \\[1ex] \Psi = \dfrac{C^2C'^2}{\alpha^2(m\psi+n)^2}, & \text{»} \quad \sqrt{\Psi} = \dfrac{CC'}{\alpha(m\psi+n)}, \\[2ex] \dfrac{1+\Pi}{\Pi} = \dfrac{C'^2}{a^2}\operatorname{csh}^2(a\varpi+b) & \text{d'où} \quad \dfrac{1}{\Pi} = \dfrac{1}{a^2}[C'^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b) - a^2]. \end{cases}$$

Or, en différentiant ces deux expressions de $\sqrt{\Psi}$ et de $\frac{1}{\Pi}$, on trouve

$$\frac{\Psi'}{2\sqrt{\Psi}} = \frac{-CC'm}{\alpha(m\psi+n)^2}, \qquad \frac{-\Pi'}{\Pi^2} = 2\frac{C'^2}{a}\operatorname{csh}(a\varpi+b)\operatorname{snh}(a\varpi+b),$$

et en substituant dès lors ces dernières valeurs, ainsi que celles (123) de Ψ, $\frac{1}{\Pi}$, et $\frac{1+\Pi}{\Pi}$, dans la seconde et la troisième des relations (122), dans lesquelles on fera abstraction du membre intermédiaire, on obtiendra les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{C^2m^2}(m\psi+n)^4 = \frac{\dfrac{1}{C^2C'^2m^2}}{\alpha^2(m\psi+n)^4}, \\ &\frac{1}{a^2}(m\psi+n)^2\,\mathrm{csh}^2(a\varpi+b) = \frac{4\alpha^2(m\psi+n)^2}{C^2C'^2}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{[C'^2\,\mathrm{csh}^2(a\varpi+b)-a^2]\,C'^4\,\mathrm{csh}^4(a\varpi+b)}{a^4\cdot\dfrac{4C'^4}{a^2}\,\mathrm{csh}^2(a\varpi+b)\,\mathrm{snh}^2(a\varpi+b)}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant,

$$(124)\qquad C'^2 = \alpha^2 \qquad \text{et} \qquad 1 = \frac{\alpha^2}{C^2C'^2}\,\frac{C'^2\,\mathrm{csh}^2(a\varpi+b) - a^2}{a^2\,\mathrm{snh}^2(a\varpi+b)},$$

équations dont la seconde, étant multipliée par le facteur $\mathrm{snh}^2(a\varpi+b) = \mathrm{csh}^2(a\varpi+b) - 1$, pourra s'écrire, en tenant compte de la première,

$$\mathrm{csh}^2(a\varpi+b) - 1 = \frac{1}{C^2}\left[\frac{\alpha^2}{a^2}\,\mathrm{csh}^2(a\varpi+b) - 1\right],$$

et exigera dès lors pour être vérifiée, quel que soit ϖ, que l'on ait

$$\frac{\alpha^2}{C^2a^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{C^2} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 = C^2a^2 \qquad \text{et} \qquad C^2 = 1,$$

c'est-à-dire qu'il faudra que l'on ait, en joignant ces deux conditions à la première (124), à la fois $C^2 = 1$, et $C'^2 = \alpha^2 = a^2$.

En reportant donc ces valeurs dans les expressions ci-dessus (123) de Φ, Ψ et $\frac{1}{\Pi}$, et y écrivant seulement, pour l'analogie des notations, c au lieu de 6, celles-ci seront alors définitivement

$$(125)\quad\left\{\begin{aligned} &\Phi(\varphi) = \mathrm{tang}\,(a\varphi + c), & &\Psi(\psi) = \frac{1}{(m\psi+n)^2}, \\ &\frac{1}{\Pi} = \mathrm{csh}^2(a\varpi+b) - 1 = \mathrm{snh}^2(a\varpi+b), & &\Pi(\varpi) = \frac{1}{\mathrm{snh}^2(a\varpi+b)}, \end{aligned}\right.$$

et par conséquent, en remettant ces expressions dans les équations (111) des trois familles de surfaces obtenues comme solution, les trois équations qui lient les coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ aux coordonnées rectilignes x, y, z seront, pour le Cas actuel,

$$(126)\quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(a\varphi + c), \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{(m\psi + n)^2}, \quad \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{1}{\operatorname{snh}^2(a\varpi + b)}.$$

Ce résultat est bien compris effectivement dans celui que nous eussions trouvé en rapportant isolément, par le procédé de Lamé (*), chaque famille de surfaces à son paramètre thermo-

(*) Les deux premières de ces équations (126) reproduisent bien effectivement les équations (69) et (75) de notre Chapitre II ; quant à la troisième famille ϖ, il nous suffira de renvoyer aux calculs et aux résultats donnés par Lamé, dans ses *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc. (en rappelant que le paramètre thermométrique de toute famille de surfaces isolée comporte essentiellement les deux constantes arbitraires σ et τ), savoir, à l'équation (14) du § XVI (page 23), laquelle représentera une famille de cônes de révolution (comme limites d'hyperboloïdes à une nappe), si l'on y suppose la constante $c = 0$, et qui, en substituant les notations usuelles à celles introduites par Lamé quelques lignes plus haut, deviendra par cette hypothèse

$$\frac{x^2+y^2}{\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varepsilon}} - \frac{z^2}{\operatorname{tgh}^2\varepsilon} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{1}{\operatorname{csh}^2\varepsilon\,\operatorname{tgh}^2\varepsilon} = \frac{1}{\operatorname{snh}^2\varepsilon}.$$

Ces mêmes résultats coïncideront d'ailleurs tout aussi bien avec ceux formulés par l'équation (31) (page 54) du § XXXIII des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, si l'on a soin d'observer que, pour sa seconde famille ρ_1 (celle des cônes de révolution), Lamé prend pour paramètre géométrique la *latitude* qu'il appelle φ, et non la *colatitude* θ, ainsi qu'on le fait généralement pour le système sphérique, en sorte que, traduites avec la notation habituelle, l'équation de cette famille de surfaces et sa seconde équation (31) précitées seront respectivement les suivantes

$$\frac{x^2+y^2}{z^2} = \operatorname{tang}^2\theta = \Pi(\varpi), \qquad a\varpi + b = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta,$$

lesquelles, pouvant s'écrire tout aussi bien

$$\Pi(\varpi) = (\operatorname{tang} 2\cdot\tfrac{1}{2}\theta)^2 = \left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta}\right)^2, \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = e^{a\varpi+b},$$

donneront, par l'élimination de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$,

$$\Pi(\varpi) = \left(\frac{2e^{a\varpi+b}}{1-e^{2(a\varpi+b)}}\right)^2 = \left(\frac{2}{e^{-(a\varpi+b)} - e^{a\varpi+b}}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)},$$

résultat qui met de nouveau en évidence le parfait accord de notre calcul avec la théorie précitée de Lamé.

métrique, mais on voit, les coefficients constants de φ et de ϖ étant les mêmes, qu'il ne comporte que *cinq* constantes arbitraires seulement, au lieu de *six* qu'eût laissé subsister dans les résultats l'emploi du procédé de Lamé (savoir les deux constantes que nous avons appelées σ et τ pour chaque famille de surfaces), restriction essentielle, imposée cette fois par la connexité dans la question des trois familles de surfaces, dont n'eût pas tenu compte le calcul, plus simple et plus rapide peut-être, que nous venons de rappeler.

Comme dernier point concernant ce Cas des coordonnées sphériques, indiquons enfin, avant de passer au Cas suivant, la forme équivalente sous laquelle se présenteront les équations (126) auxquelles nous venons d'arriver comme solution, lorsqu'on les résoudra par rapport à x, y, z : formules qui résulteront immédiatement du rapprochement des valeurs (121) et (120), et de la première équation (119), lesquelles peuvent s'écrire .

$$\left\{ x^2 = \Psi \frac{1}{1+\Phi^2} \frac{1}{\frac{1}{\Pi}+1}, \qquad y^2 = \Phi^2 x^2 = \Psi \frac{\Phi^2}{1+\Phi^2} \frac{1}{\frac{1}{\Pi}+1}, \qquad z^2 = \Psi \frac{\frac{1}{\Pi}}{\frac{1}{\Pi}+1}, \right.$$

avec les expressions qui précèdent (125), et seront par conséquent

$$x^2 = \frac{1}{(m\psi+n)^2} \frac{\cos^2(a\varphi+c)}{\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)+1}, \qquad y^2 = \frac{1}{(m\psi+n)^2} \frac{\sin^2(a\varphi+c)}{\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)+1},$$

$$z^2 = \frac{1}{(m\psi+n)^2} \frac{\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)}{\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)+1},$$

ou, en extrayant les racines,

$$(127) \quad x = \frac{\pm 1}{m\psi+n} \frac{\cos(a\varphi+c)}{\operatorname{csh}(a\varpi+b)}, \qquad y = \frac{\pm 1}{m\psi+n} \frac{\sin(a\varphi+c)}{\operatorname{csh}(a\varpi+b)}, \qquad z = \frac{\pm 1}{m\psi+n} \frac{\operatorname{snh}(a\varpi+b)}{\operatorname{csh}(a\varpi+b)}.$$

Nous indiquons dans la Note IV de l'Appendice qui termine ce Mémoire, comment on arrive encore à ce résultat par une double voie toute différente de celle-ci, en appliquant à ce même



Cas particulier défini par les hypothèses (103), deux méthodes de recherche, que nous développons dans le Chapitre V et dans la Note III précédente, en vue du Cas le plus général du problème.

Systèmes des coordonnées coniques en général. Cas particulier des coodonnées coniques du second ordre. — V°. « *Deux des mêmes dérivées seulement sont supposées nulles* ». D'après la remarque déjà faite au commencement de cette discussion (page 141), ces deux dérivées appartiendront nécessairement chacune à un groupe différent, auquel cas l'équation (15) sera vérifiée dores et déjà, puisque, si on les supposait du même groupe, cette même équation (15) exigerait qu'il y en eût une troisième également nulle, appartenant à l'autre groupe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Prenant donc arbitrairement $\frac{Q}{\varpi}$ pour l'une de ces dérivées, il y aura lieu, comme dans le Cas III°, d'examiner successivement les trois sous-cas suivants, selon la colonne verticale du tableau (12), à laquelle on empruntera la seconde dérivée.

1° « *Les deux dérivées qui sont nulles ne sont ni réciproques, ni conjuguées* »; c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

$$(128) \quad \frac{Q}{\varpi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{R}{\psi} = 0, \quad \text{ou} \quad Q = f_1(\varphi) \quad \text{et} \quad R = f_2(\varphi),$$

en vertu des conditions générales (8) ou (9).

Avec ces hypothèses, des trois équations du premier ordre (13), la première est dores et déjà vérifiée, et la seconde et la troisième se réduisent respectivement à

$$\frac{P}{\varpi}\left(Q\frac{R}{\varphi} - R\frac{Q}{\varphi}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{P}{\psi}\left(R\frac{Q}{\varphi} - Q\frac{R}{\varphi}\right) = 0,$$

c'est-à-dire, en les divisant par les produits $QR\frac{P}{\varpi}$ ou $QR\frac{P}{\psi}$, dont tous les facteurs sont par hypothèse différents de zéro,

$$(129) \quad \frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi} - \frac{1}{R}\frac{R}{\varphi} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{lQ}{\varphi} = \frac{lR}{\varphi}.$$

d'où l'on tirera en intégrant

$$Q = C^2 R, \tag{130}$$

C désignant une simple constante, eu égard aux hypothèses (128).

D'autre part, quant au groupe du second ordre (19), la quantité G (18) se réduisant, dans le Cas actuel, par les hypothèses (128), simplement à la valeur

$$G = P^2 \frac{Q}{\varphi} \frac{R}{\varphi}, \tag{131}$$

la seconde et la troisième de ces trois équations (19) se réduiront dès lors, par ces mêmes hypothèses (128), respectivement aux suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} 2PQR . P \frac{Q^2}{\varphi^2} &= 2RP^2 \left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2 + Q . P^2 \frac{Q}{\varphi} \frac{R}{\varphi}, \\ 2PQR . P \frac{R^2}{\varphi^2} &= 2P^2 Q \left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 + R . P^2 \frac{Q}{\varphi} \frac{R}{\varphi}, \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui est la même chose, en tenant compte de la valeur (130) déjà acquise de Q,

$$\left\{ \begin{aligned} 2P . C^2R . R . P . C^2 \frac{R^2}{\varphi^2} &= 2R . P^2 \left(C^2 \frac{R}{\varphi}\right)^2 + C^2R . P^2 . C^2 \frac{R}{\varphi} . \frac{R}{\varphi}, \\ 2P . C^2R . R . P . \frac{R^2}{\varphi^2} &= 2P^2 . C^2R . \left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 + R . P^2 . C^2 \frac{R}{\varphi} . \frac{R}{\varphi}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, en supprimant les facteurs C^4RP^2 ou C^2RP^2, qui ne peuvent être nuls, qu'elles se réduiront l'une et l'autre à celle-ci

$$2R \frac{R^2}{\varphi^2} = 2 \left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad 2R \frac{R^2}{\varphi^2} - 3 \left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 = 0,$$

équation de même forme que l'équation (106) déjà rencontrée à propos du Cas IV°, dont nous avons déduit par l'intégration, puis par la différentiation, les équations (113) et (114), et qui nous

fournira par conséquent, dans le Cas actuel, *mutatis mutandis*, pour l'expression cherchée de R,

$$(132) \qquad R = \frac{1}{c^2(\varphi + c')^2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2}R^{-\frac{3}{2}}\frac{R}{\varphi} = c,$$

d'où nous tirerons ensuite, eu égard à la valeur (130) de Q,

$$(133) \qquad Q = \frac{C^2}{c^2(\varphi + c')^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{4}R^{-3}\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 = c^2.$$

Enfin la première de ces mêmes équations du second ordre (19) deviendra semblablement, en tenant compte des hypothèses (128) et de la valeur (131) de G, qui en est la conséquence, ainsi que de la valeur (130) de Q,

$$2P.C^2R.R\left(C^2R\frac{P^2}{\psi^2} + R\frac{P^2}{\varpi^2}\right)$$

$$= 2\left[C^4R^2.R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + C^2R.R^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P^3.C^2\frac{R}{\varphi}.\frac{R}{\varphi}\right] + P.P^2.C^2\frac{R}{\varphi}.\frac{R}{\varphi},$$

ou, en divisant par C^2R^3 et réduisant,

$$2P\left(C^2\frac{P^2}{\psi^2} + \frac{P^2}{\varpi^2}\right) = 2\left[C^2\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right] - \frac{P^3}{R^3}\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2,$$

et enfin, en divisant de nouveau par P^3,

$$(134) \qquad \frac{2}{P^3}\left[C^2\left\{P\frac{P^2}{\psi^2} - \left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right\} + P\frac{P^2}{\varpi^2} - \left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right] = -\frac{1}{R^3}\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2,$$

ou, ce qui est la même chose, en ayant égard à la seconde relation ci-dessus (133),

$$(135) \qquad \frac{2}{P}\left(C^2\frac{d^2.lP}{d\psi^2} + \frac{d^2.lP}{d\varpi^2}\right) = -4c^2;$$

et par conséquent nous aurons définitivement, pour déterminer

notre troisième fonction inconnue P, l'équation du second ordre, linéaire en lP,

$$(136) \qquad C^2 \frac{d^2 . lP}{d\psi^2} + \frac{d^2\, lP}{d\varpi^2} + 2c^2 P = 0,$$

qui se ramène au type connu sous le nom d'*équation de Liouville*, en y changeant simplement ϖ en $\frac{\varpi}{C}$, et dont l'intégrale générale peut, en conséquence, être présentée sous la forme (*) :

$$(136^{bis}) \qquad P = -\frac{4C^2}{c^2} \frac{F_1'(\psi + iC\varpi)\, F_2'(\psi - iC\varpi)}{\left[F_1(\psi + iC\varpi) + F_2(\psi - iC\varpi)\right]^2}.$$

(*) Si l'on pose, pour le calcul de cette intégrale seulement, $\psi = x$, $\varpi = y$, $lP = z$, cette équation (136), qui devient avec les notations d'usage

$$C^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} + 2c^2 e^z = 0 \qquad \text{ou} \qquad C^2 r + t + 2c^2 e^z = 0,$$

bien que rentrant alors dans le type linéaire étudié par Ampère, ne peut être intégrée par sa méthode, parce qu'elle n'admet pas d'intégrale intermédiaire, ainsi qu'on le reconnait aisément en cherchant à appliquer cette méthode; et, d'autre part, la méthode de Laplace ne peut lui être appliquée non plus, attendu qu'elle est linéaire seulement par rapport aux dérivées, et non par rapport à l'inconnue z elle-même, comme l'exigerait cette dernière méthode.

Mais, si l'on divise cette même équation (136) par C, elle se confondra alors avec l'équation étudiée par Liouville (Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, avec notes de Liouville, *Note* IV, pp. 597-598).

$$\frac{d^2 . l\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 . l\lambda}{d\beta^2} \pm \frac{2\lambda}{a^2} = 0,$$

en y faisant simplement

$$(\alpha) \qquad \lambda = P, \qquad \alpha = \psi, \qquad \beta = C\varpi, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{a^2} = \frac{c^2}{C^2} \qquad \text{ou} \qquad a^2 = \frac{C^2}{c^2},$$

et prenant expressément le signe + à la place du double signe. Or, Liouville indique, comme intégrale de cette dernière équation, la solution, représentée à l'aide des variables auxiliaires

$$(\beta) \qquad u = \alpha + i\beta, \qquad v = \alpha - i\beta,$$

par l'expression

$$\lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v) . e^{\varphi(u)+\psi(v)}}{[1 \pm e^{\varphi(u)+\psi(v)}]^2},$$

Et l'on voit par là, avant d'aborder l'intégration du système (21), qu'aucune impossibilité essentielle, comme nous en avons rencontré à plusieurs reprises pour diverses hypothèses subsidiaires lors des Cas précédents, ne s'oppose jusqu'ici à ce que ce premier sous-cas donne naissance à une solution du problème (*).

Cela posé, les hypothèses (128) et la seconde relation (129) étant introduites dans le tableau (12) des courbures principales du système, montrent que les surfaces φ sont des sphères, et que les surfaces ψ et ϖ sont les unes et les autres des surfaces développables. Or, d'une part, toutes les sphères de la famille φ auront même centre, d'après notre Théorème II (page 118). D'autre part, les deux courbures $\frac{1}{R''_1}$ et $\frac{1}{R'_2}$, que l'on suppose nulles, étant encore dans ce Cas deux courbures *conjuguées en arc*, soit que l'on raisonne ainsi que nous l'avons déjà fait à propos du Cas précédent IV° (page 193), soit que l'on aime mieux invoquer,

---

laquelle peut être écrite encore, en la multipliant haut et bas par $e^{-2\varphi(u)}$,

$$\lambda = -4a^2 \frac{-\varphi'(u)\, e^{-\varphi(u)} . \psi'(v)\, e^{\psi(v)}}{[e^{-\varphi(u)} \pm e^{\psi(v)}]^2},$$

et qui dès lors, en faisant $e^{-\varphi(u)} = f_1(u)$ et $e^{\psi(v)} = f_2(v)$, et ne conservant que le signe supérieur seulement, peut tout aussi bien être présentée sous la forme à la fois plus simple et plus symétrique

$$\lambda = -4a^2 \frac{f'_1(u)\, f'_2(v)}{[f_1(u) + f_2(v)]^2},$$

laquelle, étant appliquée à l'équation en question (136) à l'aide du changement de notation susindiqué (α), fournirait pour P l'expression

$$P = -4 \frac{C^2}{c^2} \frac{F'_1(U)\, F'_2(V)}{[F_1(U) + F_2(V)]^2},$$

U et V étant alors ce que deviennent dans les mêmes conditions les quantités u et v de tout à l'heure, c'est-à-dire les nouvelles variables auxiliaires

$$U = \psi + iC\varpi, \qquad V = \psi - iC\varpi.$$

(*) On ne peut toutefois affirmer dès maintenant que cette solution existe en réalité, en raison de ce que les *trois* inconnues x, y, z sont astreintes à vérifier, comme nous l'avons vu par l'énoncé général du problème, un système de *six* équations aux dérivées partielles du premier ordre, et que rien ne montre à l'avance qu'il soit possible de satisfaire à une semblable condition.

comme lors du Cas III°, le Théorème I de Lamé [ou plus clairement la formule (32) de notre ***Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*** (page 27), dont ce Théorème n'est que la traduction en langage ordinaire], on reconnaît alors très aisément, d'une façon comme de l'autre, que l'intersection des surfaces ψ et ϖ ne peut être qu'une droite passant par le centre commun des sphères, d'où il suit immédiatement que chacune de ces surfaces ne peut être qu'un cône ayant ce point pour sommet (*).

Mais on arriverait tout aussi facilement à la même conclusion par la voie exclusivement analytique, en partant de la double forme d'équation

$$(137) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda = \frac{1}{(\sigma\varphi + \tau)^2},$$

que nos équations générales (74) et (75) des familles isothermes de sphères assignent dans le Cas actuel à la famille φ, et des deux dernières équations de droite (21) qui expriment les conditions d'orthogonalité des deux familles ψ et ϖ avec cette troisième famille φ, équations équivalentes par conséquent à celles-ci

$$\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{d\psi}{dz} = 0, \qquad \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en tenant compte de l'équation qui précède, aux équations linéaires du premier ordre

$$x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy} + z\frac{d\psi}{dz} = 0, \qquad x\frac{d\varpi}{dx} + y\frac{d\varpi}{dy} + z\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

dont les intégrales, étant fournies par le système simultané

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \qquad \text{avec} \qquad d\psi = 0 \qquad \text{ou} \qquad d\varpi = 0,$$

(*) La solution rencontrée pour le Cas IV° à l'aide du raisonnement géométrique précité rentre en réalité, à titre de cas particulier, dans celle-ci, l'une des familles de cônes étant alors de révolution, et l'autre se réduisant à des plans qui n'en sont qu'une simple variété, du moment qu'ils peuvent être décrits par une droite issue d'un même point fixe.

seront par conséquent, comme lors du Cas précédent IV° (page 195),

$$\psi = f_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \qquad \varpi = f_2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

et exprimeront dès lors analytiquement le même résultat que nous avons déjà énoncé tout à l'heure.

La solution du problème pour ce premier sous-cas se composant ainsi d'une famille de sphères concentriques, et de deux familles de cônes isothermes ayant pour sommet commun le centre des sphères, coïncide donc avec le système des *Coordonnées Coniques,* dont nous faisons usage sous le numéro V°, dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 150), mais encore avec la restriction que les deux familles de cônes soient toutes deux isothermes.

D'ailleurs, de même que pour le Cas antérieur III°, la première équation de gauche (21) sera vérifiée également, en partant de la forme d'équation (137) des surfaces φ, à l'aide d'une simple identification, car cette dernière, pouvant être écrite sous forme abrégée

(138) $$r^2 = \frac{1}{(\sigma\varphi + \tau)^2} \qquad \text{ou} \qquad \sigma\varphi + \tau = \frac{1}{r},$$

en faisant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r},$$

donnera, par la différentiation, les valeurs

$$\sigma\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \sigma\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{y}{r^3}, \qquad \sigma\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{z}{r^3};$$

d'où l'on conclura, en élevant au carré et ajoutant,

$$\sigma^2\Delta_1^2\varphi = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4}.$$

et enfin, en ayant égard de nouveau à cette équation (138) elle-même,

$$(139)\qquad \Delta_1\varphi = \frac{1}{\sigma r^2} = \frac{1}{\sigma}(\sigma\varphi + \tau)^2 = \sigma\left(\varphi + \frac{\tau}{\sigma}\right)^2.$$

Et dès lors, si dans l'équation précitée [la première de gauche (21)], qui, eu égard à la relation (130), peut, dans le cas actuel, être écrite plus simplement

$$(140)\qquad \Delta_1^2\varphi = \frac{1}{QR} = \frac{1}{C^2R^2} \qquad \text{ou} \qquad \Delta_1\varphi = \frac{1}{CR},$$

on y remet, sous la dernière forme, l'expression précédente (139) de $\Delta_1\varphi$ en même temps que celle (132) de R, elle sera dès lors, pour le Cas actuel,

$$\sigma\left(\varphi + \frac{\tau}{\sigma}\right)^2 = \frac{c^2}{C}(\varphi + c')^2,$$

et n'exprimera par conséquent autre chose que les deux relations entre les constantes, nécessaires pour la rendre identique, savoir

$$\sigma = \frac{c^2}{C} \qquad \text{et} \qquad \frac{\tau}{\sigma} = c', \qquad \text{ou} \qquad \tau = \sigma c' = \frac{c^2c'}{C},$$

relations qui détermineront à volonté, soit les constantes σ et τ, si l'on se donne c et c', soit inversement c et c', si l'on prend arbitrairement σ et τ.

Comme conséquence de ce calcul qu'il importe de noter, la simple comparaison de la dernière valeur (140) et de la première (139) nous permettra, eu égard à la valeur que nous venons de trouver pour σ, de récrire l'équation de la famille φ, au lieu du type (138), sous cette nouvelle forme

$$(141)\qquad \frac{1}{CR} = \frac{1}{\sigma r^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r^2}{R} = \frac{C}{\sigma} = \frac{C}{\frac{c^2}{C}} = \frac{C^2}{c^2},$$

laquelle nous sera fort utile, comme on le verra tout à l'heure.

Et l'on voit par là, avant d'aborder l'intégration du système (21), qu'aucune impossibilité essentielle, comme nous en avons rencontré à plusieurs reprises pour diverses hypothèses subsidiaires lors des Cas précédents, ne s'oppose jusqu'ici à ce que ce premier sous-cas donne naissance à une solution du problème (*).

Cela posé, les hypothèses (128) et la seconde relation (129) étant introduites dans le tableau (12) des courbures principales du système, montrent que les surfaces φ sont des sphères, et que les surfaces ψ et ϖ sont les unes et les autres des surfaces développables. Or, d'une part, toutes les sphères de la famille φ auront même centre, d'après notre Théorème II (page 118). D'autre part, les deux courbures $\frac{1}{R''_1}$ et $\frac{1}{R'_2}$, que l'on suppose nulles, étant encore dans ce Cas deux courbures *conjuguées en arc*, soit que l'on raisonne ainsi que nous l'avons déjà fait à propos du Cas précédent IV° (page 193), soit que l'on aime mieux invoquer,

laquelle peut être écrite encore, en la multipliant haut et bas par $e^{-2\varphi(u)}$,

$$\lambda = -4a^2 \frac{-\varphi'(u)\, e^{-\varphi(u)}.\psi'(v)\, e^{\psi(v)}}{[e^{-\varphi(u)} \pm e^{\psi(v)}]^2},$$

et qui dès lors, en faisant $e^{-\varphi(u)} = f_1(u)$ et $e^{\psi(v)} = f_2(v)$, et ne conservant que le signe supérieur seulement, peut tout aussi bien être présentée sous la forme à la fois plus simple et plus symétrique

$$\lambda = -4a^2 \frac{f'_1(u)\, f'_2(v)}{[f_1(u) + f_2(v)]^2},$$

laquelle, étant appliquée à l'équation en question (136) à l'aide du changement de notation susindiqué (α), fournirait pour P l'expression

$$P = -4\frac{C^2}{c^2}\frac{F'_1(U)\, F'_2(V)}{[F_1(U) + F_2(V)]^2},$$

U et V étant alors ce que deviennent dans les mêmes conditions les quantités u et v de tout à l'heure, c'est-à-dire les nouvelles variables auxiliaires

$$U = \psi + iC\varpi, \qquad V = \psi - iC\varpi.$$

(*) On ne peut toutefois affirmer dès maintenant que cette solution existe en réalité, en raison de ce que les *trois* inconnues x, y, z sont astreintes à vérifier, comme nous l'avons vu par l'énoncé général du problème, un système de *six* équations aux dérivées partielles du premier ordre, et que rien ne montre à l'avance qu'il soit possible de satisfaire à une semblable condition.

demment les deux angles θ et ω des coordonnées sphériques, et non pas les coordonnées rectilignes x, y, z qui figurent dans le système que nous venons de poser.

Adoptant donc, comme imposé en quelque sorte par la question elle-même, le système des coordonnées sphériques, pour lequel on a, comme nous l'avons déjà remarqué au Chapitre II, dans la note de la page 41,

$$\Delta_1^2 r = 1, \qquad \Delta_1^2 \omega = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \qquad \Delta_1^2 \theta = \frac{1}{r^2},$$

et qui donnera par conséquent, pour l'expression de l'invariant Δ_1 d'une fonction de point quelconque V, en faisant $\omega = \mathrm{V}$, $\varphi = r$, $\psi = \omega$, $\varpi = \theta$, dans la formule (2) de notre Chapitre I,

$$\Delta_1^2 \mathrm{V} = \left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)^2,$$

nous aurons dans le cas actuel, ψ et ϖ étant tous deux, par hypothèse, indépendants de r ou φ, pour ces deux inconnues,

$$\Delta_1^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left[\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2\right],$$

$$\Delta_1^2 \varpi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right].$$

En remettant donc ces valeurs dans les deux premières équations (142), et les multipliant en même temps par $r^2 \sin^2 \theta$, celles-ci deviendront, d'une part,

$$(143) \qquad \left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 = \mathrm{C}^2\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{r^2}{\mathrm{R}} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\mathrm{P}},$$

et l'on voit, en ayant égard à la dernière valeur (141) trouvée un peu plus haut pour le rapport $\frac{r^2}{\mathrm{R}}$, ainsi qu'aux hypothèses (128), qu'elles ne contiendront plus cette fois, avec les variables θ et ω, que les inconnues ψ et ϖ, et non plus la variable φ, comme tout à l'heure.

seront par conséquent, comme lors du Cas précédent IV° (page 195),

$$\psi = f_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \qquad \varpi = f_2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

et exprimeront dès lors analytiquement le même résultat que nous avons déjà énoncé tout à l'heure.

La solution du problème pour ce premier sous-cas se composant ainsi d'une famille de sphères concentriques, et de deux familles de cônes isothermes ayant pour sommet commun le centre des sphères, coïncide donc avec le système des *Coordonnées Coniques,* dont nous faisons usage sous le numéro V°, dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 150), mais encore avec la restriction que les deux familles de cônes soient toutes deux isothermes.

D'ailleurs, de même que pour le Cas antérieur III°, la première équation de gauche (21) sera vérifiée également, en partant de la forme d'équation (137) des surfaces φ, à l'aide d'une simple identification, car cette dernière, pouvant être écrite sous forme abrégée

$$(138) \qquad r^2 = \frac{1}{(\sigma\varphi + \tau)^2} \qquad \text{ou} \qquad \sigma\varphi + \tau = \frac{1}{r},$$

en faisant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r},$$

donnera, par la différentiation, les valeurs

$$\sigma\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \sigma\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{y}{r^3}, \qquad \sigma\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{z}{r^3};$$

d'où l'on conclura, en élevant au carré et ajoutant,

$$\sigma^2\Delta_1^2\varphi = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4},$$

demment les deux angles θ et ω des coordonnées sphériques, et non pas les coordonnées rectilignes x, y, z qui figurent dans le système que nous venons de poser.

Adoptant donc, comme imposé en quelque sorte par la question elle-même, le système des coordonnées sphériques, pour lequel on a, comme nous l'avons déjà remarqué au Chapitre II, dans la note de la page 41,

$$\Delta_1^2 r = 1, \qquad \Delta_1^2 \omega = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}, \qquad \Delta_1^2 \theta = \frac{1}{r^2},$$

et qui donnera par conséquent, pour l'expression de l'invariant Δ_1 d'une fonction de point quelconque V, en faisant $\omega = V$, $\varphi = r$, $\psi = \omega$, $\varpi = \theta$, dans la formule (2) de notre Chapitre I,

$$\Delta_1^2 V = \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{dV}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2,$$

nous aurons dans le cas actuel, ψ et ϖ étant tous deux, par hypothèse, indépendants de r ou φ, pour ces deux inconnues,

$$\Delta_1^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left[\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2\right],$$

$$\Delta_1^2 \varpi = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right].$$

En remettant donc ces valeurs dans les deux premières équations (142), et les multipliant en même temps par $r^2 \sin^2\theta$, celles-ci deviendront, d'une part,

$$(143) \qquad \left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 = C^2\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{r^2}{R}\cdot\frac{\sin^2\theta}{P},$$

et l'on voit, en ayant égard à la dernière valeur (141) trouvée un peu plus haut pour le rapport $\frac{r^2}{R}$, ainsi qu'aux hypothèses (128), qu'elles ne contiendront plus cette fois, avec les variables θ et ω, que les inconnues ψ et ϖ, et non plus la variable φ, comme tout à l'heure.

D'autre part, chacune des deux familles ψ et ϖ étant représentée en coordonnées sphériques par une équation de la forme (35) du Chapitre II, si nous convenons de distinguer par les indices 1 et 2 les dérivées par rapport à ω correspondant à chacune de ces équations des deux familles, la condition qui exprimera l'orthogonalité de ces deux familles de cônes sera

$$1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = 0, \tag{144}$$

ainsi que nous le montrons dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 150-151), équation dans laquelle les deux dérivées qui y figurent sont celles qui résulteraient de la différentiation par rapport à ω de chacune des équations précitées des deux familles, c'est-à-dire celles dont les valeurs, étant fournies par les équations

$$\frac{d\psi}{d\omega} + \frac{d\psi}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1 = 0, \qquad \frac{d\varpi}{d\omega} + \frac{d\varpi}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = 0,$$

seraient par conséquent

$$\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1 = -\frac{\dfrac{d\psi}{d\omega}}{\dfrac{d\psi}{d\theta}}, \qquad \left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = -\frac{\dfrac{d\varpi}{d\omega}}{\dfrac{d\varpi}{d\theta}}.$$

En reportant donc ces deux valeurs dans la condition d'orthogonalité (144), puis la multipliant par $\sin^2\theta . \frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\varpi}{d\theta}$, on obtiendra par là, transformée en coordonnées sphériques, la troisième équation (142); et dès lors, si nous la joignons aux deux précédentes (143) qui représentent les deux premières (142), en tenant compte de la dernière valeur (141), nous aurons maintenant, pour déterminer nos deux inconnues ψ et ϖ, le système formé des deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 = C^2\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{C^2}{c^2}\frac{\sin^2\theta}{P}.\\ &\frac{d\psi}{d\omega}\frac{d\varpi}{d\omega} + \sin^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\varpi}{d\theta} = 0, \end{aligned}\right. \tag{145}$$

dans lequel P représente toujours par hypothèse la fonction de ψ et ϖ (136bis), et qui déterminera, comme nous l'avons dit un peu plus haut, les deux familles de cônes par leurs traces sur l'une quelconque des sphères de la famille φ, de même que, dans le Cas précité III°, le système analogue (49) définissait les deux familles de cylindres ψ et ϖ au moyen de leurs sections droites par un plan quelconque de la famille φ (*).

Nous intégrerons encore aisément ce dernier système, si nous nous reportons aux résultats et employons de nouveau les procédés de deux calculs antérieurs, qui offrent avec la question actuelle une connexité évidente.

En effet, tout d'abord si l'on se rappelle que, pour le problème de l'isothermie traité dans notre Chapitre II, la simple substitution, à la place de la coordonnée sphérique θ, de la coordonnée thermométrique correspondante, savoir

$$(146) \qquad \chi = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta,$$

nous a permis de ramener en fait le problème relatif aux familles de cônes à celui relatif aux familles de cylindres, en rendant identiques, sauf la dénomination des variables indépendantes, les deux équations aux dérivées partielles (33) et (38), ou leurs intégrales générales (34) et (39), relatives à ces deux cas ; guidés par ce précédent, disons-nous, nous serons tout naturellement conduits à effectuer la même substitution de variables dans le système proposé (145), à l'aide des formules suivantes, qui résultent immédiatement de la définition précédente (146) :

(*) Ce rapprochement est important, parce qu'en montrant que la première question n'est manifestement qu'un cas-limite de la seconde (savoir celui où, après avoir fixé la sphère considérée par un des points communs aux deux traces, on imagine ensuite que son rayon grandisse indéfiniment), il révèle par là même une connexité intime entre les deux Cas, laquelle laisse soupçonner l'*identité* complète, qui existe en réalité, du problème analytique correspondant à ces deux Cas, et met dès lors sur la voie de la réduction pure et simple des formules relatives au second à celles déjà rencontrées pour le premier, qui est évidemment dans ces conditions le moyen le plus simple et le plus rapide de résoudre la question.

$$
7)\quad \begin{cases}
d\chi = \dfrac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = e^{\chi}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\theta = \dfrac{\pm e^{\chi}}{\sqrt{1+e^{2\chi}}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+e^{2\chi}}}, \\[2ex]
\sin\theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = \dfrac{2e^{\chi}}{1+e^{2\chi}} = \dfrac{2}{e^{\chi}+e^{-\chi}} = \dfrac{1}{\operatorname{csh}\chi}, \\[2ex]
\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\chi}} = \dfrac{\sqrt{\operatorname{csh}^2\chi - 1}}{\pm\operatorname{csh}\chi} = \pm\dfrac{\operatorname{snh}\chi}{\operatorname{csh}\chi}.
\end{cases}
$$

Et si, conjointement avec cette opération, nous remettons en même temps l'expression (136bis) à la place de P, qui en tenait lieu par hypothèse, alors ce même système se transformera dans le suivant

$$
\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2 = C^2\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\chi}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}\,\frac{[F_1(\psi+iC\varpi)+F_2(\psi-iC\varpi)]^2}{F'_1(\psi+iC\varpi)\,F'_2(\psi-iC\varpi)}\,\frac{1}{\operatorname{csh}^2\chi},
$$

$$
\frac{d\psi}{d\omega}\frac{d\varpi}{d\omega} + \frac{d\psi}{d\chi}\frac{d\varpi}{d\chi} = 0,
$$

qui est bien effectivement identique, comme forme, au système (49) relatif au Cas III°, sauf la dénomination des variables indépendantes et de la constante, et aussi l'expression de la fonction qui constitue le troisième membre de la première ligne.

Or, pour ce même système (49), nous avons eu soin de faire observer (pp. 169-170) que la forme de la solution (73) ou (72) étant exclusivement fournie par la première et la dernière de ces trois équations, on pouvait considérer l'équation intermédiaire comme destinée uniquement à fournir une relation réversible entre les fonctions arbitraires F_1 et F_2, qui n'entrent que dans cette seule équation d'une part, et d'autre part les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui figurent dans cette solution (73). Il résulte donc immédiatement de là pour le Cas actuel, en premier lieu, *mutatis mutandis*, qu'en faisant d'abord abstraction de l'équation intermédiaire, la solution la plus générale des deux autres de ces équations (148) consistera présentement dans les deux équations

$$
(148^{bis})\quad \begin{cases}
\psi = \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) + \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \\[2ex]
\varpi = \dfrac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) - \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right],
\end{cases}
$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant encore deux fonctions imaginaires, arbitraires sous la condition d'être respectivement conjuguées, c'est-à-dire du type (68), lesquelles donneront encore inversement (en faisant dans les formules (65) les mêmes changements que tout à l'heure),

$$(149) \qquad \begin{cases} \omega = \frac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ \chi = \frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{cases}$$

les fonctions f, respectivement inverses des précédentes $\mathcal{F}$, étant de nouveau deux fonctions imaginaires conjuguées.

Cela posé, si, pour conserver l'analogie des notations avec le Cas précité, nous faisons cette fois

$$(149^{bis}) \qquad u = \omega - i\chi, \qquad v = \omega + i\chi, \qquad U = \psi + iC\varpi, \qquad V = \psi - iC\varpi,$$

d'une part il est bien clair que les deux derniers systèmes (148bis) et (149) établiront de nouveau entre ces variables les deux systèmes d'équations réciproques (70) et (71), ou (84) et (83), qui entraîneront encore entre les dérivées des fonctions inverses f et $\mathcal{F}$ les mêmes relations (85); et, d'autre part, la première des formules (148bis) et la seconde des formules (149) redevenant avec ces notations

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \chi = \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right],$$

la première donnera de nouveau, comme lors des équations (80),

$$\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{\left[\mathcal{F}'_1(u) + \mathcal{F}'_2(v)\right]^2 - \left[\mathcal{F}'_1(u) - \mathcal{F}'_2(v)\right]^2\right\}$$
$$= \mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v) = \frac{1}{f'_1(U)}\,\frac{1}{f'_1(V)}.$$

Et dès lors, la seconde des équations proposées (148), c'est-à-dire celle obtenue en égalant dans la première ligne le premier

membre au troisième, que nous avions tout à l'heure laissée de côté, devenant, en y substituant cette dernière valeur, ainsi que l'expression précédente de χ,

$$\frac{1}{f'_1(U)f'_2(V)} = -\frac{1}{4}\frac{[F_1(U)+F_2(V)]^2}{F'_1(U)F'_2(V)\,\mathrm{csh}^2\frac{i}{2}[f_1(U)-f_2(V)]},$$

si l'on tient compte de la définition : $\mathrm{csh}\, z = \cos iz$, d'où : $\mathrm{csh}\, iz = \cos(-z) = \cos z$, on voit ainsi qu'il sera nécessaire et suffisant, pour que cette seconde équation (148) soit satisfaite à son tour, qu'étant données arbitrairement les deux fonctions F_1 et F_2, qui n'entrent encore que dans cette seule équation, l'on puisse toujours déterminer deux autres fonctions f_1 et f_2, telles que l'on ait identiquement

$$(150)\qquad \frac{\frac{1}{4}f'_1(U)f'_2(V)}{\cos^2\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]} = -\frac{F'_1(U)F'_2(V)}{[F_1(U)+F_2(V)]^2},$$

relation encore évidemment réversible, qui pourra tout aussi bien, si elle admet une solution, servir alors à déterminer les fonctions F_1 et F_2 en se donnant arbitrairement les fonctions f_1 et f_2 ou leurs inverses $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

La question étant désormais posée en ces termes, cette dernière équation (150) pourra s'écrire tout d'abord, en intervertissant les deux membres, ainsi qu'il suit

$$\frac{d}{dU}\left[\frac{F'_2(V)}{F_1(U)+F_2(V)}\right] = \frac{d}{dU}\left[\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]\cdot\tfrac{1}{2}f'_2(V)\right],$$

puis cela fait, comme on aura simultanément

$$\left\{\begin{aligned} \frac{F'_2(V)}{F_1(U)+F_2(V)} &= \frac{d.l}{dV}[F_1(U)+F_2(V)],\\ \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]\;\tfrac{1}{2}f'_2(V) &= \frac{-\sin\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}{\cos\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}\left[-\tfrac{1}{2}f'_2(V)\right]\\ &= \frac{d.l}{dV}\cos\tfrac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)].\end{aligned}\right.$$

l'équation précédente, qu'il s'agit d'identifier, équivaudra dès lors à la suivante

$$\frac{d}{dU}\left(\frac{dl}{dV}\left[F_1(U)+F_2(V)\right]\right)=\frac{d}{dU}\left(\frac{dl}{dV}\cos\tfrac{1}{2}\left[f_1(U)-f_2(V)\right]\right),$$

c'est-à-dire, sous forme plus simple, à celle-ci

$$\frac{d^2.l}{dUdV}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}{F_1(U)+F_2(V)}\right)=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$l\left(\frac{\cos\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}{F_1(U)+F_2(V)}\right)=l\mathfrak{f}_1(U)+l\mathfrak{f}_2(V)$$

ou

$$\cos\tfrac{1}{2}\left[f_1(U)-f_2(V)\right]=\mathfrak{f}_1(U)\mathfrak{f}_2(V)\left[F_1(U)+F_2(V)\right].$$

Or, comme, étant développée, cette dernière équation devient elle-même

$$\cos\tfrac{1}{2}f_1(U).\cos\tfrac{1}{2}f_2(V)+\sin\tfrac{1}{2}f_1(U).\sin\tfrac{1}{2}f_2(V)$$
$$=\mathfrak{f}_1(U)F_1(U).\mathfrak{f}_2(V)+\mathfrak{f}_1(U).\mathfrak{f}_2(V)F_2(V),$$

on voit qu'il suffira, pour procurer l'identification demandée, de prendre à la fois

$$\left\{\begin{array}{ll}\cos\frac{1}{2}f_1(U)=\mathfrak{f}_1(U)F_1(U), & \cos\frac{1}{2}f_2(V)=\mathfrak{f}_2(V),\\ \sin\frac{1}{2}f_2(V)=\mathfrak{f}_2(V)F_2(V), & \sin\frac{1}{2}f_1(U)=\mathfrak{f}_1(U),\end{array}\right.$$

conditions qui détermineront successivement, d'abord les fonctions f lorsque l'on se donnera les fonctions F, ou inversement, puis les fonctions auxiliaires $\mathfrak{f}$ elles-mêmes, si on les remplace par les combinaisons manifestement équivalentes

$$(150^{\text{bis}})\qquad \begin{array}{ll}\cot\frac{1}{2}f_1(U)=F_1(U), & \tang\frac{1}{2}f_2(V)=F_2(V),\\ \mathfrak{f}_1(U)^2\left[1+F_1(U)^2\right]=1, & \mathfrak{f}_2(V)^2\left[1+F_2(V)^2\right]=1.\end{array}$$

Soit donc que l'on se donne les fonctions f ou les fonctions F, les deux premières de ces équations fourniront les deux autres fonctions cherchées, qui procurent l'identification des deux expressions proposées (150). Si l'on tient à le vérifier, il suffira d'observer que l'on déduit immédiatement de ces équations (150bis)

$$\left\{\begin{aligned} &F_1'(U)=\frac{-\frac{1}{2}f_1'(U)}{\sin^2\frac{1}{2}f_1(U)}, \qquad F_2'(V)=\frac{\frac{1}{2}f_2'(V)}{\cos^2\frac{1}{2}f_2(V)},\\ &F_1(U)+F_2(V)=\frac{\cos\frac{1}{2}f_1(U)}{\sin\frac{1}{2}f_1(U)}+\frac{\sin\frac{1}{2}f_2(V)}{\cos\frac{1}{2}f_2(V)}=\frac{\cos\frac{1}{2}\left[f_1(U)-f_2(V)\right]}{\sin\frac{1}{2}f_1(U)\cos\frac{1}{2}f_2(V)}, \end{aligned}\right.$$

valeurs qui, étant remises dans la première des deux expressions en question, rendent dès lors manifeste l'identification demandée, et par conséquent aussi la vérification de l'équation restante (148). D'où l'on voit que la solution la plus générale de ce système proposé (148) est bien représentée par les deux équations (148bis) ou (149), les deux fonctions imaginaires $\mathcal{F}$ ou f demeurant arbitraires sous la condition d'être, ainsi que nous l'avons dit, respectivement conjuguées.

Sous une autre forme plus simple et plus rapide, les trois fonctions inconnues Q, R et φ étant déjà déterminées par les trois équations (133), (132), et (137), si l'on n'effectue pas tout d'abord l'intégration de l'équation (136), et que l'on intervertisse de nouveau, comme nous l'avons fait en premier lieu pour ce même Cas III$^\circ$, les inconnues et les variables indépendantes, on obtiendra, à la place du système précédent (148), le suivant

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned} &C^2\left[\left(\frac{d\omega}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{d\chi}{d\psi}\right)^2\right]=\left(\frac{d\omega}{d\varpi}\right)^2+\left(\frac{d\chi}{d\varpi}\right)^2=c^2P\,\mathrm{csh}^2\chi,\\ &\frac{d\omega}{d\psi}\,\frac{d\omega}{d\varpi}+\frac{d\chi}{d\psi}\,\frac{d\chi}{d\varpi}=0, \end{aligned}\right.$$

déduit immédiatement du système analogue (51), en y faisant simplement la substitution de variables, de constante et de

fonction déjà opérée tout à l'heure, savoir en y écrivant pour inconnues ω et χ au lieu de x et y, au premier membre de la première ligne C comme coefficient au lieu de c, et enfin au troisième membre la fonction $c^2 P \, \text{csh}^2 \chi$ à la place de la fonction $C'^2 P$, ainsi qu'il résulte de l'expression (46) de P relative à ce Cas III° (*). Alors, si, comme dans la Note de la page 166, on y regarde la fonction P comme inconnue, l'ensemble de ces équations et de l'équation précitée (136) formera un système surabondant de quatre équations entre les trois inconnues restantes P, ω, et χ, et les variables indépendantes ψ et ϖ, pour lequel il sera loisible, comme toujours, de choisir, à sa plus grande commodité, l'ordre dans lequel on déterminera successivement ces inconnues. Or, la première et la troisième des équations précédentes (151) déterminent à elles seules, ainsi que nous l'avons vu, les inconnues ω et χ sous la forme [déduite, toujours par le même changement susindiqué, de la solution (67)]

$$(152) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ \chi &= \frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{aligned} \right.$$

ces expressions devant encore être toutes deux réelles, car, pour la seconde inconnue χ, la coordonnée sphérique θ variant par définition entre 0 et π seulement, sa valeur de définition (146) est bien toujours réelle, d'où il suit que les deux fonctions f_1 et f_2, qui sont d'ailleurs évidemment, eu égard au calcul effectué pour le Cas précédent (page 168), les fonctions inverses des fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ devront être encore, comme elles, deux fonctions imaginaires conjuguées.

En se servant donc de ces valeurs déjà acquises, la seconde

(*) Tels sont bien, en effet, les changements qu'il faut opérer pour que le troisième membre de la première ligne (49), qui, d'après l'expression (46), est égal à $\frac{c^2}{C'^2 P}$, redonne le membre correspondant des équations (148) ou (145), qui est $\frac{C^2}{c^2 P \, \text{csh}^2 \chi}$.

des mêmes équations (151) donnera dès lors

$$(153)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{C^2}{c^2}\left[\left(\frac{d\omega}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{d\psi}\right)^2\right]\frac{1}{\operatorname{csh}^2\chi} \\ &= \frac{C^2}{c^2}\,\frac{f'_1(\psi + iC\varpi)\,f'_2(\psi - iC\varpi)}{\operatorname{csh}^2\frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right]}, \end{aligned}\right.$$

et il sera nécessaire et suffisant, par conséquent, pour que les expressions (152) fournissent la solution du problème, que cette dernière expression de P vérifie la quatrième équation du système spécifié tout à l'heure, à savoir l'équation (136). Or, il est bien facile de s'assurer que cette dernière condition sera toujours remplie, de quelque façon que l'on prenne les fonctions arbitraires f_1 et f_2.

Le procédé le plus simple pour le voir sera d'effectuer cette vérification, non pas sur l'équation (136) dans sa forme actuelle, mais sur la même équation transformée, en y prenant pour variables indépendantes, à la place de ψ et ϖ, les fonctions linéaires U et V (149bis), savoir

$$(154)\qquad U = \psi + iC\varpi, \qquad V = \psi - iC\varpi,$$

qui, d'après un théorème connu, donneront lieu, pour la transformation des dérivées, aux formules symboliques

$$\frac{d^n}{d\psi^n} = \left[\frac{d}{dU} + \frac{d}{dV}\right]^n, \qquad \frac{d^n}{d\varpi^n} = \left[iC\left(\frac{d}{dU} - \frac{d}{dV}\right)\right]^n,$$

en sorte que, pour $n = 2$, cette équation (136) se transformera immédiatement dans la suivante :

$$(155)\qquad \frac{d^2\, lP}{dU dV} = -\frac{c^2}{2C^2}P.$$

Or, de la valeur proposée (153) de P, qui sera devenue, étant

écrite à l'aide des variables (154),

$$(156) \qquad P = \frac{C^2}{c^2} \frac{f'_1(U)\, f'_2(V)}{\operatorname{csh}^2 \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right]},$$

on déduira successivement

$$lP = l\frac{C^2}{c^2} + lf'_1(U) + lf'_2(V) - 2l \operatorname{csh} \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right],$$

$$\frac{d.lP}{dU} = \frac{f''_1(U)}{f'_1(U)} - 2\,\frac{\operatorname{snh} \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right]}{\operatorname{csh} \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right]} \cdot \frac{i}{2} f'_1(U),$$

$$= F(U) - \operatorname{tgh} \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right] . if'_1(U),$$

$$\frac{d^2.lP}{dUdV} = \frac{d}{dV}\left(\frac{d.lP}{dU}\right) = - \frac{-\frac{i}{2} f'_2(V)}{\operatorname{csh}^2 \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right]} \cdot if'_1(U),$$

et le simple rapprochement de la dernière de ces valeurs avec l'expression précédente (156) de P rend dès lors manifeste la vérification de l'équation (155) ou (136), qui était exigée par cette seconde manière de poser la question (*).

(*) Outre le rôle qu'elles jouent ainsi dans les calculs qui précèdent pour la solution complète de la question, ces expressions de P nous paraissent intéressantes à cet autre point de vue qu'elles semblent infirmer, ainsi que l'expression (46) de P relative au Cas III°, une sorte de proposition analytique, énoncée par Lamé sans démonstration (*Coord. Curv.*, § LVI, page 100, dernier alinéa), à savoir que pour tout système triplement isotherme les expressions des trois fonctions P, Q, R étaient nécessairement de la forme

$$P = \alpha\left[\Psi(\psi) - \Pi(\varpi)\right], \qquad Q = \beta\left[\Pi(\varpi) - \Phi(\varphi)\right], \qquad R = \gamma\left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right],$$

(α, β, γ étant trois constantes égales à ± 1), ou tout au moins en ce qu'elles appellent de nouvelles recherches tendant à établir si, oui ou non, ces expressions (46) et (136bis) ou (153) sont effectivement comprises, soit à titre de cas particuliers, soit à titre de cas-limites, dans les dites formules de Lamé, et dans l'affirmative pour quelles formes particulières des fonctions Φ, Ψ, Π on pourrait les y faire rentrer : faute de quoi, les expressions en question constitueraient de véritables solutions singulières non

Nous avons tenu cette fois encore à résoudre le problème analytique tel qu'il avait été posé par Lamé, et sans nous départir un seul instant des méthodes indiquées par l'illustre créateur du Système triplement Isotherme; sinon, nous eussions pu, comme pour le Cas analogue relatif aux cylindres, obtenir beaucoup plus rapidement les mêmes résultats, en ayant recours de nouveau à la même interprétation géométrique des équations restant à intégrer, qui nous a fourni déjà pour ce Cas, comme on l'a vu, la solution complète de la question avec une facilité beaucoup plus grande.

En effet, de même que pour le Cas précité, une fois obtenues les expressions des trois fonctions P, Q, R, le système (21) se partageant encore, ainsi que nous l'avons remarqué, en deux moitiés, composées chacune des mêmes équations, dont l'une est déjà satisfaite par la seule désignation que nous avons reconnue nécessaire de la nature des familles composant le système, à savoir une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes ayant pour sommet commun le centre des sphères, il est bien clair que l'autre moitié du système en question ne saurait exprimer géométriquement autre chose que ce triple fait, savoir que ces deux familles de cônes sont individuellement isothermes, et de plus orthogonales entre elles. Et nous nous sommes assuré par un calcul direct, à propos du Cas des cylindres, que ce second mode de résoudre le problème conduisait bien exactement à la même solution que le premier, seul strictement conforme à la méthode et aux idées générales indiquées par Lamé.

Or, si l'on adopte de nouveau pour ce second calcul, comme il est naturel, à la place des coordonnées rectilignes, les variables indépendantes ω et χ, à l'aide desquelles, lors du problème géné-

---

moins importantes des équations générales du problème, dont Lamé ne fait pas mention, et dont on ne peut se dispenser de tenir compte. [Voir également, si l'on veut, pour plus de détails, la note de la page 187 de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*, etc., dans lequel nous avions cru pouvoir nous baser sans contrôle sur cette proposition, pour résumer en une formule unique les résultats de nos recherches sur les lignes géodésiques des surfaces susceptibles de faire partie d'un semblable système].

ral de l'isothermie traité dans notre Chapitre II, nous avons déjà rendu identiques, quant à la forme, les équations tant différentielles qu'intégrales, propres aux cylindres et celles relatives aux cônes, la dernière des conditions que nous venons de dire (celle de l'orthogonalité) étant dès lors exprimée, comme dans le calcul précédent, par la troisième équation (148), les deux premières, relatives à l'isothermie des familles ψ et ϖ, seront exprimées par ailleurs par deux équations de la forme (38) du dit Chapitre II, que nous avons donnée à l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ pour les familles de cônes. L'ensemble des trois équations restantes du système (21), spécifiées tout à l'heure, savoir la première de droite et les deux dernières de gauche, sera donc, d'après ce qui précède, complètement équivalent au système suivant du second ordre entre les deux inconnues ψ et ϖ

$$(157)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2\psi}{d\omega^2} + \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = 0, \qquad \dfrac{d^2\varpi}{d\omega^2} + \dfrac{d^2\varpi}{d\chi^2} = 0, \\ \dfrac{d\psi}{d\omega}\dfrac{d\varpi}{d\omega} + \dfrac{d\psi}{d\chi}\dfrac{d\varpi}{d\chi} = 0, \end{array} \right.$$

identique, sauf la dénomination des variables, au système déjà traité (74), relatif aux cylindres. La solution la plus générale du problème actuel sera donc encore représentée, d'après le calcul effectué pour le Cas en question, par les mêmes expressions (79), où la constante k et les variables auxiliaires u et v auront cette fois pour valeurs, à la place des quantités (82) et (69), celles-ci

$$(157^{\text{bis}})\qquad k = i\mathrm{C}, \qquad u = \omega - i\chi, \qquad v = \omega + i\chi,$$

et consistera par conséquent dans les deux expressions

$$(158)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) + \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \\ \varpi = \dfrac{1}{2i\mathrm{C}}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) - \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \end{array} \right.$$

dans lesquelles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ désigneront encore deux fonctions imaginaires conjuguées, complètement arbitraires d'ailleurs.

En effet, bien que le système du second ordre (157), ainsi fourni directement par des considérations géométriques évidentes, doive être envisagé *a priori* comme plus large que le système du premier ordre (148) primitivement posé entre les mêmes variables, et qu'il semble par conséquent de nouveau que l'on soit tenu de restreindre actuellement la solution (158) par la condition de satisfaire encore à ces trois équations (148) elles-mêmes, il se trouve que cette condition n'introduit en réalité aucune restriction, par suite de la forme particulière de ce système (148), et notamment de celle de l'expression qui constitue le troisième membre de la première ligne de ce système, laquelle résulte directement de la valeur de la fonction P relative à la question actuelle. Car nous avons reconnu déjà, d'une part, *mutatis mutandis*, par le calcul analogue relatif aux cylindres (pp. 173-174), que ces dernières expressions (158) de ψ et ϖ vérifiaient, quelles que fussent $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la première et la dernière de ces équations (148). Et, d'autre part, il résulte immédiatement des calculs effectués un peu plus haut pour le Cas actuel, que l'équation intermédiaire est également vérifiée de la même façon, puisque nous avons vu qu'elle se réduisait, avec les expressions (148bis) ou (158) de ψ et ϖ, à la condition réversible (150), qui était vérifiée identiquement en établissant simplement la corrélation (150bis) entre les fonctions F introduites par la fonction P et les fonctions f, inverses des fonctions $\mathcal{F}$ introduites par ces expressions (158) elles-mêmes. Et par conséquent la solution (158), étant supposée obtenue par cette seconde voie, eût donc bien encore coïncidé, non seulement comme forme, mais aussi comme étendue, avec celle (148bis) fournie par notre précédent calcul.

L'intégration de toutes les équations proposées étant ainsi complètement effectuée, comme on vient de le voir, par un simple changement de notations dans les résultats d'un calcul antérieur, une dernière opération nous reste seule désormais à

accomplir pour avoir les relations définitives qui lient entre eux, dans le Cas actuel, les deux systèmes de coordonnées x, y, z, et φ, ψ, ϖ, à savoir, d'éliminer des résultats qui précèdent les variables intermédiaires ω et χ, dont l'introduction n'avait d'autre but que de ramener ainsi le problème à des résultats déjà obtenus.

A cet effet, en premier lieu, si l'on se reporte encore aux résultats établis dans notre Chapitre II, et si l'on fait attention que les deux expressions (158), trouvées à deux reprises pour ψ et ϖ, appartenant nécessairement au type général (39) dudit Chapitre relatif aux familles isothermes de cônes, s'en déduisent dès lors en particularisant simplement les fonctions arbitraires f_1 et f_2 de ce type général de la façon que nous avons dite, il est clair que l'on aura les expressions des mêmes coordonnées en x, y, z, en prenant sous la même condition, pour cette même équation générale des cônes isothermes, au lieu de la forme primitive (39), la forme équivalente (43) à laquelle nous l'avons ensuite ramenée.

En effet, si nous faisons dans ce but

$$(159)\qquad \bar{u} = \operatorname{tang} u = \operatorname{tang}(\omega - i\chi), \qquad \bar{v} = \operatorname{tang} v = \operatorname{tang}(\omega + i\chi),$$

ces quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$ étant dès lors, par définition, celles-là mêmes que, dans le passage précité de notre Chapitre II, nous désignions respectivement par v et u [formules (41)], et ayant par conséquent pour valeurs en x, y, z, d'après les formules suivantes (42), savoir

$$(160)\qquad \bar{u} = \frac{xy + irz}{x^2 + z^2}, \qquad \bar{v} = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2},$$

les formules (158) ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right],$$

deviendront, étant exprimées à l'aide de ces quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$,

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(\text{arc tang } \bar{u}) + \mathcal{F}_2(\text{arc tang } \bar{v})\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(\text{arc tang } \bar{u}) - \mathcal{F}_2(\text{arc tang } \bar{v})\right], \end{aligned}\right.$$

et pourront dès lors être représentées plus simplement, comme dans le type général (48) du Chapitre II, par ces deux autres formules

$$(161) \qquad \psi = \frac{1}{2}\left[F_1(\bar{u}) + F_2(\bar{v})\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2iC}\left[F_1(\bar{u}) - F_2(\bar{v})\right],$$

les deux nouvelles fonctions

$$F_1(t) = \mathcal{F}_1(\text{arc tang } t) \qquad \text{et} \qquad F_2(t) = \mathcal{F}_2(\text{arc tang } t),$$

qui ne sont évidemment pas les mêmes par hypothèse que celles de l'expression (136bis), étant encore, de même que les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ d'où elles procèdent, arbitraires sous la condition d'être deux fonctions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire du type (68).

Agissant donc ainsi, et joignant aux deux équations ainsi formées, comme première équation, celle de droite (138), dans laquelle on fera $\frac{1}{\sigma} = A$ et $-\frac{\tau}{\sigma} = B$, les expressions définitives des coordonnées φ, ψ, ϖ en fonction des coordonnées x, y, z, c'est-à-dire les équations les plus générales des familles de surfaces composant le Système Coordonné, seront donc pour le Cas actuel

$$(162) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{A}{r} + B = \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + B, \\ \psi &= \frac{1}{2}\left[F_1\left(\frac{xy+irz}{x^2+z^2}\right) + F_2\left(\frac{xy-irz}{x^2+z^2}\right)\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2iC}\left[F_1\left(\frac{xy+irz}{x^2+z^2}\right) - F_2\left(\frac{xy-irz}{x^2+z^2}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

et comprendront par conséquent, avec les trois constantes arbi-

raires réelles A, B, C, les deux fonctions F_1 et F_2, arbitraires sous la seule condition d'être deux fonctions imaginaires conjuguées, et dans la composition desquelles il entrera par conséquent deux fonctions réelles entièrement arbitraires.

En second lieu, pour avoir les formules inverses qui donneront l'expression des coordonnées x, y, z en fonction de φ, ψ, ϖ, il suffira évidemment, dans les formules usuelles de définition du système sphérique, savoir

$$x = r \sin\theta \cos\omega, \qquad y = r \sin\theta \sin\omega, \qquad z = r\cos\theta,$$

de remettre, en premier lieu, à la place de r, $\sin\theta$, et $\cos\theta$, leurs valeurs en fonction des coordonnées φ ou χ, fournies par les équations (138) et (147); puis, cela fait, de substituer dans les expressions ainsi obtenues celles (149) ou (152) trouvées plus haut pour ω et χ en fonction de ψ et ϖ, moyennant quoi la solution définitive de la question sera représentée, pour abréger les écritures, par l'ensemble des cinq formules

$$(163)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \dfrac{\cos\omega}{\operatorname{csh}\chi}, \qquad y = \dfrac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \dfrac{\sin\omega}{\operatorname{csh}\chi}, \qquad z = \dfrac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \dfrac{\operatorname{snh}\chi}{\operatorname{csh}\chi}, \\ \omega = \dfrac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ \chi = \dfrac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{cases}$$

et contiendra de nouveau par conséquent, sous cette seconde forme, trois constantes arbitraires σ, τ et C, et deux fonctions f_1 et f_2 arbitraires sous la condition d'être imaginaires conjuguées, lesquelles introduiront encore deux fractions réelles entièrement arbitraires.

Présentons encore, pour terminer cette théorie, ainsi que nous l'avons fait pour le Cas des Cylindres, deux exemples seulement de l'application des formules que nous venons de donner.

1° Prenons dans les formules (162) ou (161), avec la valeur

$C = 1$ de la constante, pour les deux fonctions conjuguées F_1 et F_2, les fonctions

$$F_1(\bar{u}) = -\frac{1}{a}\left[b - i(\operatorname{arc\,tg}\bar{u} - c)\right], \qquad F_2(\bar{v}) = -\frac{1}{a}\left[b + i(\operatorname{arc\,tg}\bar{v} - c)\right];$$

ces mêmes formules donneront alors

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[F_1(\bar{u}) + F_2(\bar{v})\right] = -\frac{1}{2a}\left[2b - i(\operatorname{arc\,tg}\bar{u} - \operatorname{arc\,tg}\bar{v})\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2i}\left[F_1(\bar{u}) - F_2(\bar{v})\right] = \frac{i}{2ai}\left[\operatorname{arc\,tg}\bar{u} + \operatorname{arc\,tg}\bar{v} - 2c\right]. \end{aligned}\right.$$

Or, les définitions (159) donnant inversement

$$\operatorname{arc\,tang}\bar{u} = \omega - i\chi, \qquad \operatorname{arc\,tang}\bar{v} = \omega + i\chi,$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tg}\bar{u} - \operatorname{arc\,tg}\bar{v} = -2i\chi, \qquad \operatorname{arc\,tg}\bar{u} + \operatorname{arc\,tg}\bar{v} = 2\omega,$$

on voit que les expressions précédentes de ψ et ϖ se réduiront simplement à

$$\psi = -\frac{1}{2a}\left[2b - i(-2i\chi)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2a}(2\omega - 2c),$$

d'où l'on tirera par conséquent

$$a\psi + b = \chi, \qquad a\varpi + c = \omega,$$

valeurs qui, étant reportées dans les trois premières de nos formules (163), donneront définitivement, pour les expressions des trois coordonnées x, y, z,

$$x = \frac{\pm 1}{\sigma\rho + \tau}\frac{\cos(a\varpi + c)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)}, \qquad y = \frac{\pm 1}{\sigma\rho + \tau}\frac{\sin(a\varpi + c)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)},$$

$$z = \frac{\pm 1}{\sigma\rho + \tau}\frac{\operatorname{snh}(a\psi + b)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)}.$$

raires réelles A, B, C, les deux fonctions F_1 et F_2, arbitraires sous la seule condition d'être deux fonctions imaginaires conjuguées, et dans la composition desquelles il entrera par conséquent deux fonctions réelles entièrement arbitraires.

En second lieu, pour avoir les formules inverses qui donneront l'expression des coordonnées x, y, z en fonction de φ, ψ, ϖ, il suffira évidemment, dans les formules usuelles de définition du système sphérique, savoir

$$x = r \sin\theta \cos\omega, \qquad y = r \sin\theta \sin\omega, \qquad z = r \cos\theta,$$

de remettre, en premier lieu, à la place de r, $\sin\theta$, et $\cos\theta$, leurs valeurs en fonction des coordonnées φ ou χ, fournies par les équations (138) et (147); puis, cela fait, de substituer dans les expressions ainsi obtenues celles (149) ou (152) trouvées plus haut pour ω et χ en fonction de ψ et ϖ, moyennant quoi la solution définitive de la question sera représentée, pour abréger les écritures, par l'ensemble des cinq formules

$$(163)\quad \left\{ \begin{aligned} & x = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \frac{\cos\omega}{\operatorname{csh}\chi}, \qquad y = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \frac{\sin\omega}{\operatorname{csh}\chi}, \qquad z = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \frac{\operatorname{snh}\chi}{\operatorname{csh}\chi}, \\ & \omega = \frac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ & \chi = \frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{aligned} \right.$$

et contiendra de nouveau par conséquent, sous cette seconde forme, trois constantes arbitraires σ, τ et C, et deux fonctions f_1 et f_2 arbitraires sous la condition d'être imaginaires conjuguées, lesquelles introduiront encore deux fractions réelles entièrement arbitraires.

Présentons encore, pour terminer cette théorie, ainsi que nous l'avons fait pour le Cas des Cylindres, deux exemples seulement de l'application des formules que nous venons de donner.

1° Prenons dans les formules (162) ou (161), avec la valeur

C = 1 de la constante, pour les deux fonctions conjuguées F_1 et F_2, les fonctions

$$F_1(\bar{u}) = -\frac{1}{a}\left[b - i(\operatorname{arc\,tg}\bar{u} - c)\right], \qquad F_2(\bar{v}) = -\frac{1}{a}\left[b + i(\operatorname{arc\,tg}\bar{v} - c)\right];$$

ces mêmes formules donneront alors

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[F_1(\bar{u}) + F_2(\bar{v})\right] = -\frac{1}{2a}\left[2b - i(\operatorname{arc\,tg}\bar{u} - \operatorname{arc\,tg}\bar{v})\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2i}\left[F_1(\bar{u}) - F_2(\bar{v})\right] = \frac{i}{2ai}\left[\operatorname{arc\,tg}\bar{u} + \operatorname{arc\,tg}\bar{v} - 2c\right]. \end{aligned}\right.$$

Or, les définitions (159) donnant inversement

$$\operatorname{arc\,tang}\bar{u} = \omega - i\chi, \qquad \operatorname{arc\,tang}\bar{v} = \omega + i\chi,$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tg}\bar{u} - \operatorname{arc\,tg}\bar{v} = -2i\chi, \qquad \operatorname{arc\,tg}\bar{u} + \operatorname{arc\,tg}\bar{v} = 2\omega,$$

on voit que les expressions précédentes de ψ et ϖ se réduiront simplement à

$$\psi = -\frac{1}{2a}\left[2b - i(-2i\chi)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2a}(2\omega - 2c),$$

d'où l'on tirera par conséquent

$$a\psi + b = \chi, \qquad a\varpi + c = \omega,$$

valeurs qui, étant reportées dans les trois premières de nos formules (163), donneront définitivement, pour les expressions des trois coordonnées x, y, z,

$$x = \frac{\pm 1}{\sigma\rho + \tau}\,\frac{\cos(a\varpi + c)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)}, \qquad y = \frac{\pm 1}{\sigma\rho + \tau}\,\frac{\sin(a\varpi + c)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)},$$

$$z = \frac{\pm 1}{\sigma\rho + \tau}\,\frac{\operatorname{snh}(a\psi + b)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)}.$$

Ce sont *littéralement*, sauf encore permutation des trois coordonnées curvilignes, les formules (127) qui définissent le système sphérique avec les *cinq* constantes qu'il comporte essentiellement, lequel rentrait évidemment *a priori*, comme nous l'avons remarqué (page 212, en note), à titre de cas-limite, dans le système conique que nous venons d'étudier.

2° Prenons encore dans les mêmes formules (162) ou (161), avec la valeur $C = 1$ de la constante, pour les deux fonctions conjuguées F_1 et F_2 la même fonction réelle, savoir

$$F_1(t) = F_2(t) = \operatorname{Arg\,sn}\left(\frac{t}{k\sqrt{1+t^2}}\right), \tag{164}$$

k étant le module du sinus d'amplitude, module supposé réel et plus petit que l'unité. Nous aurons alors d'abord, d'après nos définitions (57), comme pour les trois derniers exemples relatifs aux cylindres, les formules inverses (87bis), savoir

$$\left\{\begin{array}{ll} U = \psi + i\varpi, & V = \psi - i\varpi, \\ \text{ou} & \\ \psi = \frac{1}{2}(U + V), & i\varpi = \frac{1}{2}(U - V), \end{array}\right. \tag{165}$$

et par suite, en comparant les secondes de ces expressions avec les formules (161), les deux séries d'expressions réciproques

$$\left\{\begin{array}{ll} U = F_1(\bar{u}) = \operatorname{Arg\,sn}\left(\dfrac{\bar{u}}{k\sqrt{1+\bar{u}^2}}\right), & V = F_2(\bar{v}) = \operatorname{Arg\,sn}\left(\dfrac{\bar{v}}{k\sqrt{1+}}\right. \\ \text{ou} & \\ \dfrac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = k \operatorname{sn} U, & \dfrac{\bar{v}}{\sqrt{1+\bar{v}^2}} = k \operatorname{sn} V, \end{array}\right. \tag{166}$$

dans lesquelles les deux radicaux sont expressément suppos d'après nos définitions (164) des fonctions F_1 et F_2, pris t les deux avec la même détermination de signe.

Cela posé, traduisons tout d'abord en x, y, z, au lieu

variables auxiliaires u et v, ces dernières formules (166), qui équivalent en fait aux hypothèses actuelles.

Pour cela, les définitions (160) des quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$ donneront, pour la première, par exemple,

$$1 + \bar{u}^2 = 1 + \frac{(xy + irz)^2}{(x^2 + z^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + z^2)^2}[(x^4 + 2x^2z^2 + z^4) + (x^2y^2 - r^2z^2 + 2irxyz)]$$

$$= \frac{1}{(x^2 + z^2)^2}[(x^2 + y^2 + z^2)x^2 + (z^2 + x^2 - r^2) z^2 + 2irxyz)]$$

$$= \frac{1}{(x^2 + z^2)^2}(r^2x^2 - y^2z^2 + 2irxyz) = \frac{(rx + iyz)^2}{(x^2 + z^2)^2},$$

d'où, en extrayant les racines, les deux valeurs

$$\sqrt{1 + \bar{u}^2} = \pm \frac{rx + iyz}{x^2 + z^2}, \qquad \sqrt{1 + \bar{v}^2} = \pm \frac{rx - iyz}{x^2 + z^2},$$

le même signe + ou — devant être pris à la fois devant ces deux expressions pour la même détermination des deux radicaux, du moment que ces premiers membres représentent dans cette hypothèse deux expressions imaginaires conjuguées.

En prenant donc l'inverse de la première de ces expressions, nous trouverons

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{u}^2}} = \pm \frac{x^2 + z^2}{rx + iyz} = \pm \frac{(x^2 + z^2)(rx - iyz)}{r^2x^2 + y^2z^2} = \pm \frac{(x^2 + z^2)(rx - iyz)}{(x^2 + z^2)(x^2 + y^2)},$$

d'où par conséquent, en simplifiant, pour les deux expressions, avec la même observation relativement aux signes,

$$(167) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{u}^2}} = \pm \frac{rx - iyz}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{v}^2}} = \pm \frac{rx + iyz}{x^2 + y^2}.$$

De là nous conclurons, en multipliant respectivement par ces dernières valeurs les expressions (160), quant à la première,

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \pm \frac{xy+irz}{x^2+z^2}\,\frac{rx-iyz}{x^2+y^2} = \pm \frac{ry(x^2+z^2)+izx(r^2-y^2)}{(x^2+z^2)(x^2+y^2)},$$

et par conséquent, en simplifiant de nouveau, les deux nouvelles valeurs

$$(168)\qquad \frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \pm \frac{ry+izx}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\bar{v}}{\sqrt{1+\bar{v}^2}} = \pm \frac{ry-izx}{x^2+y^2}.$$

Et comme les secondes expressions ci-dessus (166) donnent évidemment, quant à la première,

$$\mathrm{dn}\,\mathrm{U} = \pm\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\mathrm{U}} = \pm\sqrt{1-\frac{\bar{u}^2}{1+\bar{u}^2}},$$

c'est-à-dire pour les deux expressions à la fois,

$$(169)\qquad \mathrm{dn}\,\mathrm{U} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\bar{u}^2}}, \qquad \mathrm{dn}\,\mathrm{V} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\bar{v}^2}},$$

(le même signe devant encore être pris dans les deux seconds membres, toujours pour la même raison), le simple rapprochement des égalités (166) et (168) d'une part, et (167) et (169) de l'autre, nous fournira donc les quatre égalités

$$(170)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{ry+izx}{x^2+y^2} = \pm k\,\mathrm{sn}\,\mathrm{U}, & \dfrac{ry-izx}{x^2+y^2} = \pm k\,\mathrm{sn}\,\mathrm{V}, \\[2ex] \dfrac{rx-iyz}{x^2+y^2} = \pm\,\mathrm{dn}\,\mathrm{U}, & \dfrac{rx+iyz}{x^2+y^2} = \pm\,\mathrm{dn}\,\mathrm{V}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles le signe sera expressément le même, d'après les réserves que nous avons faites à ce sujet, dans les deux équa-

ports. Puis, cela fait, la première équation (171) pouvant s'écrire

$$\frac{2r}{x}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\pm k(\text{sn U}+\text{sn V}),$$

ou, en résolvant par rapport à x,

$$x=\pm\frac{2r}{k}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{\text{sn}(\psi+i\varpi)+\text{sn}(\psi-i\varpi)},$$

on trouvera donc, en développant, et remplaçant le rapport $\frac{y}{x}$ par la valeur obtenue tout à l'heure (173),

$$(174^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} x&=\pm\frac{2r}{k}\frac{\frac{k.\text{sn}\,\psi\,\text{cn}\,i\varpi}{\text{dn}\,\psi}}{1+\frac{k^2\,\text{sn}^2\,\psi\,\text{cn}^2\,i\varpi}{\text{dn}^2\,\psi}}\frac{1}{\frac{2\,\text{sn}\,\psi\,\text{cn}\,i\varpi\,\text{dn}\,i\varpi}{1-k^2\,\text{sn}^2\,\psi\,\text{sn}^2\,i\varpi}}\\ &=\pm r\frac{\text{dn}\,\psi}{\text{dn}^2\,\psi+k^2\,\text{sn}^2\,\psi\,\text{cn}^2\,i\varpi}\frac{1-k^2\,\text{sn}^2\,\psi\,\text{sn}^2\,i\varpi}{\text{dn}\,i\varpi}=\pm r\frac{\text{dn}\,\psi}{\text{dn}\,i\varpi},\end{aligned}\right.$$

car on aperçoit de suite que l'on a

$$(175)\quad \left\{\begin{aligned}\text{dn}^2\,\psi+k^2\,\text{sn}^2\,\psi\,\text{cn}^2\,i\varpi&=1-k^2\,\text{sn}^2\,\psi+k^2\text{sn}^2\,\psi\,(1-\text{sn}^2\,i\varpi)\\ &=1-k^2\,\text{sn}^2\,\psi\,\text{sn}^2\,i\varpi.\end{aligned}\right.$$

En remettant alors cette valeur de la coordonnée x dans l'expression obtenue tout à l'heure (173) pour le rapport $\frac{y}{x}$, nous en déduirons

$$(175^{\text{bis}})\quad y=\pm x\frac{k\,\text{sn}\psi\,\text{cn}\,i\varpi}{\text{dn}\psi}=\pm r\frac{\text{dn}\psi}{\text{dn}\,i\varpi}\frac{k\,\text{sn}\psi\,\text{cn}\,i\varpi}{\text{dn}\psi}=\pm kr\frac{\text{sn}\psi\,\text{cn}\,i\varpi}{\text{dn}\,i\varpi}$$

logue relatif aux cylindres, on pourra encore résoudre la question par deux voies différentes, suivant que l'on se proposera de déterminer de prime abord les expressions en φ, ψ, ϖ des trois coordonnées rectilignes, ou au contraire les équations des trois surfaces qui composeront le système.

(*1re Méthode.*) Par le premier procédé, qui est encore le plus rapide, deux quelconques des équations précédentes (171) détermineront à elles seules les rapports des coordonnées rectilignes entre elles, tels que $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ par exemple, et par suite, étant jointes à l'équation de la troisième famille φ, savoir celle des sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \frac{1}{(\sigma\varphi + \tau)^2}, \tag{172}$$

fourniront dès lors l'expression demandée des trois coordonnées x, y, z, à la seule condition d'y remplacer U et V par leurs valeurs actuelles (165) en ψ et ϖ.

A cet effet, divisant tout d'abord les deux équations de la première ligne (171) par celle de gauche de la seconde ligne, et substituant les valeurs (165) de U et V, nous obtiendrons ainsi, eu égard à l'indépendance du double signe pour les deux lignes entre elles,

$$(173)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\pm k(\text{sn}\,U + \text{sn}\,V)}{\text{dn}\,U + \text{dn}\,V} = \frac{\pm k\left[\text{sn}\,(\psi + i\varpi) + \text{sn}\,(\psi - i\varpi)\right]}{\text{dn}\,(\psi + i\varpi) + \text{dn}\,(\psi - i\varpi)} \\ &= \pm k \frac{2\,\text{sn}\,\psi\,\text{cn}\,i\varpi\,\text{dn}\,i\varpi}{2\,\text{dn}\,\psi\,\text{dn}\,i\varpi} = \pm k \frac{\text{sn}\,\psi\,\text{cn}\,i\varpi}{\text{dn}\,\psi}, \end{aligned} \right.$$

$$(174)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{iz}{r} &= \frac{\pm k(\text{sn}\,U - \text{sn}\,V)}{\text{dn}\,U + \text{dn}\,V} = \frac{\pm k\left[\text{sn}\,(\psi + i\varpi) - \text{sn}\,(\psi - i\varpi)\right]}{\text{dn}\,(\psi + i\varpi) + \text{dn}\,(\psi - i\varpi)} \\ &= \pm k \frac{2\,\text{sn}\,i\varpi\,\text{cn}\,\psi\,\text{dn}\,\psi}{2\,\text{dn}\,\psi\,\text{dn}\,i\varpi} = \pm k \frac{\text{cn}\,\psi\,\text{sn}\,i\varpi}{\text{dn}\,i\varpi}, \end{aligned} \right.$$

le même signe devant encore être pris à la fois, d'après ce que nous avons expliqué dans les expressions de ces deux rap-

ports. Puis, cela fait, la première équation (171) pouvant s'écrire

$$\frac{2r}{x}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\pm k(\mathrm{sn\,U}+\mathrm{sn\,V}),$$

ou, en résolvant par rapport à x,

$$x=\pm\frac{2r}{k}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{\mathrm{sn}(\psi+i\varpi)+\mathrm{sn}(\psi-i\varpi)},$$

on trouvera donc, en développant, et remplaçant le rapport $\frac{y}{x}$ par la valeur obtenue tout à l'heure (173),

$$(174^{\text{bis}})\quad\left\{\begin{aligned} x&=\pm\frac{2r}{k}\frac{\frac{k\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,\psi}}{1+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{cn}^2 i\varpi}{\mathrm{dn}^2\psi}}\frac{1}{\frac{2\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{sn}^2 i\varpi}}\\ &=\pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}^2\psi+k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{cn}^2 i\varpi}\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{sn}^2 i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}=\pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}\,i\varpi},\end{aligned}\right.$$

car on aperçoit de suite que l'on a

$$(175)\quad\left\{\begin{aligned} \mathrm{dn}^2\psi+k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{cn}^2 i\varpi&=1-k^2\,\mathrm{sn}^2\psi+k^2\,\mathrm{sn}^2\psi(1-\mathrm{sn}^2 i\varpi)\\ &=1-k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{sn}^2 i\varpi.\end{aligned}\right.$$

En remettant alors cette valeur de la coordonnée x dans l'expression obtenue tout à l'heure (173) pour le rapport $\frac{y}{x}$, nous en déduirons

$$(175^{\text{bis}})\quad y=\pm x\frac{k\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,\psi}=\pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}\frac{k\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,\psi}=\pm kr\frac{\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}$$

et enfin l'expression (174) deviendra, étant multipliée par $-ir$,

$$z = \pm kr \frac{\operatorname{cn} \psi . i \operatorname{sn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}.$$

Aucune corrélation n'est nécessaire entre le double signe de cette dernière expression et celui des précédentes (174bis) et (175bis) de x et de y, du moment que celui-ci provient de la seule équation (174), tandis que dans les deux autres intervient encore le signe propre à l'équation (171) isolément. C'est pourquoi nous écrivons au second membre encore le double signe de la même façon que pour ces deux expressions précédentes de x et de y.

En rapprochant donc ces résulats, on voit que les expressions des trois coordonnées rectilignes en ψ et ϖ, et r ou φ, sont alors, pour le cas actuel : (*)

$$(176) \qquad x = \pm r \frac{\operatorname{dn} \psi}{\operatorname{dn} i\varpi}, \qquad y = \pm kr \frac{\operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}, \qquad z = \pm kr \frac{\operatorname{cn} \psi . i \operatorname{sn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}.$$

(*) Nous arriverions également à ces mêmes expressions des coordonnées x, y, z en ψ et ϖ, et r ou φ, par une voie plus directe peut-être, mais moins rapide, en appliquant de prime abord les formules (163) que nous avons données spécialement pour cet objet, et dans lesquelles interviennent comme auxiliaires les variables intermédiaires ω et χ (111). Afin de présenter semblablement un exemple de l'application de ces dernières formules, nous croyons devoir indiquer de même, en note, ce nouveau calcul, qui offrira d'ailleurs un bon exercice (l'occasion ne s'en rencontrant pas fréquemment dans l'enseignement classique) pour l'emploi des formules les plus simples relatives aux fonctions elliptiques.

A cet effet les deux premières des formules (149bis) donnant, en même temps que l'équation (138),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega = \tfrac{1}{2}(u + v), \qquad i\chi = -\tfrac{1}{2}(u - v), & r = \dfrac{1}{\sigma\varphi + \tau}, \\ \operatorname{csh} \chi = \cos i\chi = \cos \tfrac{1}{2}(u - v), & \operatorname{snh} \chi = \tfrac{1}{i} \sin i\chi = i \sin \tfrac{1}{2}(u - v), \end{array} \right.$$

les trois premières formules du groupe (163) donneront alors simultanément, pour les trois coordonnées x, y, z,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm r \dfrac{\cos \frac{1}{2}(u + v)}{\cos \frac{1}{2}(u - v)} = \pm r \dfrac{\cos \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} v - \sin \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} v + \sin \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v} = \pm r \dfrac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \operatorname{tang}}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \operatorname{tang}} \\ y = \pm r \dfrac{\sin \frac{1}{2}(u + v)}{\cos \frac{1}{2}(u - v)} = \pm r \dfrac{\sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} v + \cos \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} v + \sin \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} v} = \pm r \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} u + \operatorname{tang}}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \operatorname{tang}} \\ z = \pm r \dfrac{i \sin \frac{1}{2}(u - v)}{\cos \frac{1}{2}(u - v)} = \pm ir \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - v) = \pm ir \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} u - \operatorname{tang} \frac{1}{2} v}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \operatorname{tang} \frac{1}{2} v}, \end{array} \right.$$



De même que les expressions (88bis) rencontrées dans l'exemple analogue relatif aux cylindres, ces dernières valeurs de x, y, z sont bien encore réelles, nonobstant la présence apparente de

---

c'est-à-dire

$$(\alpha) \qquad x = \pm r \frac{N}{D}, \qquad y = \pm r \frac{N'}{D}, \qquad z = \pm ir \frac{N''}{D},$$

en convenant de faire, pour faciliter les transformations,

$$(6) \qquad \begin{cases} D = 1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v, & N = 1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v, \\ N' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v, & N'' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v; \end{cases}$$

et par conséquent la question se réduit simplement à substituer dans ces dernières expressions les valeurs de tang $\frac{1}{2} u$ et tang $\frac{1}{2} v$ qui correspondent aux hypothèses (164).

Pour cela, il suffira d'observer qu'ayant immédiatement, d'après les définitions mêmes (159) des quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$,

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \sin u \qquad \text{et} \qquad \frac{\bar{v}}{\sqrt{1+\bar{v}^2}} = \sin \bar{v},$$

les équations (166), qui constituent notre point de départ, équivalant aux deux suivantes

$$U = \operatorname{Arg\,sn}\left(\frac{1}{k} \sin u\right), \qquad V = \operatorname{Arg\,sn}\left(\frac{1}{k} \sin v\right),$$

donneront alors inversement celles-ci

$$\operatorname{sn} U = \frac{1}{k} \sin u, \qquad \operatorname{sn} V = \frac{1}{k} \sin v,$$

d'où l'on tirera d'abord

$$\sin u = k \operatorname{sn} U, \qquad \cos u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 U} = \operatorname{dn} U,$$

puis de là

$$(\gamma) \qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} u = \frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1-\operatorname{dn} U}{1+\operatorname{dn} U}, \qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{1-\operatorname{dn} V}{1+\operatorname{dn} V}.$$

Or, les quantités U et V n'intervenant dans les expressions ci-dessus (165) de ψ et $i\varpi$ qu'affectées du coefficient $\frac{1}{2}$, il est rationnel de faire apparaître dans les formules que nous venons d'écrire ces quantités $\frac{1}{2}$ U et $\frac{1}{2}$ V comme arguments, à la place des quantités U et V elles-mêmes, parce que c'est évidemment dans ces conditions que les expressions cherchées de ψ et ϖ ressortiront alors avec le plus de facilité.

Dans ce but, la formule d'addition du delta d'amplitude, si l'on y prend les deux arguments a et b égaux l'un et l'autre à $\frac{1}{2}$ U, donnant

$$(\delta) \qquad \operatorname{dn} U = \frac{S}{T},$$

l'imaginaire i. En effet les trois formules classiques, dites ***des modules complémentaires***, savoir

$$(176^{bis})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{sn}\,(i\varpi, k) = \frac{i\,\mathrm{sn}\,(\varpi, k')}{\mathrm{cn}\,(\varpi, k')}, \qquad \mathrm{cn}\,(i\varpi, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}\,(\varpi, k')}, \\ &\mathrm{dn}\,(i\varpi, k) = \frac{\mathrm{dn}\,(\varpi, k')}{\mathrm{cn}\,(\varpi, k')}, \end{aligned}\right.$$

---

en faisant pour abréger les transformations

$$(\varepsilon)\qquad T = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\tfrac{1}{2}U,$$

$$(\eta)\qquad \left\{\begin{aligned} S &= \mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}U - k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{cn}^2\tfrac{1}{2}U \\ &= 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U - k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U\,(1 - \mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U) \\ &= 1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U + k^2\,\mathrm{sn}^4\tfrac{1}{2}U, \end{aligned}\right.$$

on aura donc, en reportant successivement ces valeurs (δ), puis (ε) et (η) dans celle (γ) qu'il s'agit de calculer,

$$\left|\begin{aligned} \mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}u &= \frac{1 - \frac{S}{T}}{1 + \frac{S}{T}} = \frac{T - S}{T + S} \\ &= \frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\tfrac{1}{2}U - (1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U + k^2\,\mathrm{sn}^4\tfrac{1}{2}U)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\tfrac{1}{2}U + (1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U + k^2\,\mathrm{sn}^4\tfrac{1}{2}U)} \\ &= \frac{2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U\,(1 - \mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U)}{2\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U)} = \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{cn}^2\tfrac{1}{2}U}{\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}U}, \end{aligned}\right.$$

et par conséquent simplement, en extrayant les racines,

$$(\theta)\qquad \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{k\,\mathrm{sn}\,\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{cn}\,\tfrac{1}{2}U}{\mathrm{dn}\,\tfrac{1}{2}U}, \qquad \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v = \frac{k\,\mathrm{sn}\,\tfrac{1}{2}V\,\mathrm{cn}\,\tfrac{1}{2}V}{\mathrm{dn}\,\tfrac{1}{2}V}.$$

Le même signe devant être pris à la fois dans ces deux valeurs (u et v étant par définition deux quantités imaginaires conjuguées), on pourra se dispenser de mettre en évidence le double signe, à condition de supposer que le coefficient k, qui n'intervient dans toutes les formules que nous aurons à appliquer que par son carré, emporte avec lui ce double signe.

Pour calculer commodément les résultats de la substitution de ces valeurs dans les expressions ($\mathfrak{G}$), nous introduirons encore, à l'aide d'un symbole spécial, la quantité suivante, que l'on peut mettre sous trois formes,

$$(\zeta)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}V &= \mathrm{cn}^2\tfrac{1}{2}U + \mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}V \\ &= \mathrm{cn}^2\tfrac{1}{2}V + \mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}V\,\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}U. \end{aligned}\right.$$



transformeront ces mêmes expressions, avec le module k' pour les fonctions relatives à ϖ, dans les suivantes, qui sont entièrement réelles, aussi bien quant à l'apparence que quant au fond,

---

A l'aide de cette quantité, les expressions (θ) donneront

$$(\iota)\quad \left\{\begin{aligned} 1 \pm \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v &= 1 \pm \frac{k \operatorname{sn}\frac{1}{2}U \operatorname{cn}\frac{1}{2}U}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U}\,\frac{k \operatorname{sn}\frac{1}{2}V \operatorname{cn}\frac{1}{2}V}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}V} \\ &= \frac{\Delta}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V}\,\frac{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V \pm k^2 \operatorname{sn}\frac{1}{2}U \operatorname{sn}\frac{1}{2}V \operatorname{cn}\frac{1}{2}U \operatorname{cn}\frac{1}{2}V}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}U \operatorname{sn}^2\frac{1}{2}V} \\ &= \frac{\Delta}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V} \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}(U \mp V), \end{aligned}\right.$$

d'où par conséquent, pour les deux premières expressions (6), les valeurs

$$D = \frac{\Delta \operatorname{dn}\frac{1}{2}(U - V)}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V}, \qquad N = \frac{\Delta \operatorname{dn}\frac{1}{2}(U + V)}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V}.$$

On trouvera semblablement, avec la même facilité,

$$(\varkappa)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u \pm \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v &= \frac{k \operatorname{sn}\frac{1}{2}U \operatorname{cn}\frac{1}{2}U}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}U} \pm \frac{k \operatorname{sn}\frac{1}{2}V \operatorname{cn}\frac{1}{2}V}{\operatorname{dn}\frac{1}{2}V} \\ &= \frac{k\Delta}{\Delta \operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V}(\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U) \\ &= \frac{k.\mathfrak{N}}{\Delta \operatorname{dn}\frac{1}{2}U \operatorname{dn}\frac{1}{2}V}, \end{aligned}\right.$$

en posant de nouveau, pour faciliter les transformations,

$$(\lambda)\qquad \mathfrak{N} = \Delta\,(\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U),$$

quantité composée de deux termes, qui se déduisent l'un de l'autre (abstraction faite du signe) par l'échange des deux lettres U et V, la quantité Δ n'étant pas atteinte par cette permutation, et dont il suffira dès lors de calculer le premier seulement.

A cet effet, prenant pour cette quantité Δ la dernière des trois expressions (ζ), on trouvera aisément pour ce premier terme

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V &= (\operatorname{cn}^2\tfrac{1}{2}V + \operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}^2\tfrac{1}{2}U) \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V \\ &= \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V.\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \\ &\quad + \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U.\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V. \end{aligned}$$

On aura donc, en permutant U et V, pour le second des deux termes de $\mathfrak{N}$, abstraction faite du signe,

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U &= \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U.\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}U \\ &\quad + \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V.\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}U \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}V \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}U, \end{aligned}$$



les deux modules complémentaires k et k' étant tous deux, par hypothèse, moindres que l'unité,

$$
(177)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \pm r\,\frac{\operatorname{dn}(\psi, k)}{\operatorname{dn}(i\varpi, k)} = \pm\, r \operatorname{dn}(\psi, k)\,\frac{\operatorname{cn}(\varpi, k')}{\operatorname{dn}(\varpi, k')},\\
y &= \pm kr\,\frac{\operatorname{sn}(\psi, k)\operatorname{cn}(i\varpi, k)}{\operatorname{dn}(i\varpi, k)} = \pm kr\,\frac{\operatorname{sn}(\psi, k)}{\operatorname{cn}(\varpi, k')}\,\frac{\operatorname{cn}(\varpi, k')}{\operatorname{dn}(\varpi, k')} = \pm kr\,\frac{\operatorname{sn}(\psi,}{\operatorname{dn}(\varpi,}\\
z &= \pm kr\,\frac{\operatorname{cn}(\psi, k).\, i\operatorname{sn}(i\varpi, k)}{\operatorname{dn}(i\varpi, k)} = \pm\, kr \operatorname{cn}(\psi, k)\,\frac{-\operatorname{sn}(\varpi, k')}{\operatorname{cn}(\varpi, k')}\,\frac{\operatorname{cn}(\varpi, k')}{\operatorname{dn}(\varpi, k')}\\
&= \mp\, kr \operatorname{cn}(\psi, k)\,\frac{\operatorname{sn}(\varpi, k')}{\operatorname{dn}(\varpi, k')}.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut enfin donner à ces mêmes formules (177) une forme à la fois plus simple et plus symétrique, par le moyen d'un chan-

---

et par suite, en ajoutant ou retranchant, on obtiendra pour la valeur de l'expression $\mathfrak{M}$ (λ), les seconds facteurs étant les mêmes pour les termes correspondants dans les deux dernières expressions,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= \Delta(\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V} \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U})\\
&= (\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V} \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U})\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\\
&+ (\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U} \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V})\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\\
&= (\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V} \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U})(\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\\
&\qquad \pm \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}),
\end{aligned}
$$

étant entendu expressément que les signes supérieurs doivent être pris tous ensemble dans cette suite d'égalités de même que dans la précédente (ι), et aussi les signes inférieurs également tous en même temps.

Avec cette même condition, l'expression que nous venons de calculer pouvant évidemment être écrite

$$\mathfrak{M} = \Delta \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \pm \mathrm{V}).\Delta \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \mp \mathrm{V}),$$

nous obtiendrons définitivement, en la reportant dans le dernier membre des égalités ($\varkappa$),

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u \pm \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{k.\Delta \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \pm \mathrm{V}).\Delta \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \mp \mathrm{V})}{\Delta \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}},$$

valeur qui donnera, en prenant successivement les signes supérieurs et inférieurs, séparément pour chacune des deux dernières expressions (6),

$$\mathrm{N}' = \frac{k\Delta \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}}, \qquad \mathrm{N}'' = \frac{k\Delta \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}}.$$

La valeur des quatre quantités (6) étant ainsi calculée, les expressions (α) donneront

gement linéaire du paramètre ϖ, car les trois formules également classiques

$$(177^{bis})\qquad \mathrm{sn}(z+\mathrm{K})=\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{dn}\,z},\qquad \mathrm{cn}(z+\mathrm{K})=-k'\frac{\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{dn}\,z},\qquad \mathrm{dn}(z+\mathrm{K})=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,z},$$

étant appliquées à l'argument ϖ et au module k', dont la fonction complète analogue à K est précisément K', donneront

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{sn}(\varpi+\mathrm{K}',k')=\frac{\mathrm{cn}(\varpi,k')}{\mathrm{dn}(\varpi,k')},\qquad \mathrm{cn}(\varpi+\mathrm{K}',k')=-k\frac{\mathrm{sn}(\varpi,k')}{\mathrm{dn}(\varpi,k')},\\ &\mathrm{dn}(\varpi+\mathrm{K}',k')=\frac{k}{\mathrm{dn}(\varpi,k')},\end{aligned}\right.$$

valeurs qui, étant remises dans les expressions précédentes, les transformeront de nouveau dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &x=\pm r\,\mathrm{dn}(\psi,k)\,\mathrm{sn}(\varpi+\mathrm{K}',k'),\qquad y=\pm r\,\mathrm{sn}(\psi,k)\,\mathrm{dn}(\varpi+\mathrm{K}',k'),\\ &z=\pm r\,\mathrm{cn}(\psi,k)\,\mathrm{cn}(\varpi+\mathrm{K}',k');\end{aligned}\right.$$

et, dès lors, on voit qu'il suffira d'y changer ϖ en $\varpi-\mathrm{K}'$, pour que les mêmes expressions de x, y, z prennent définitivement la forme suivante, dont on remarquera l'analogie manifeste avec celles (89) de l'exemple 2° relatif aux cylindres,

$$(178)\qquad \left\{\begin{aligned} &x=\pm r\,\mathrm{dn}(\psi,k)\,\mathrm{sn}(\varpi,k'),\qquad y=\pm r\,\mathrm{sn}(\psi,k)\,\mathrm{dn}(\varpi,k'),\\ &z=\pm r\,\mathrm{cn}(\psi,k)\,\mathrm{cn}(\varpi,k').\end{aligned}\right.$$

---

alors immédiatement, en supprimant le facteur commun aux deux termes des différents rapports $\frac{\Delta}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\frac{1}{2}\mathrm{V}}$, puis ayant égard aux secondes formules initiales (165),

$$\left\{\begin{aligned} x&=\pm r\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\pm r\frac{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}=\pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}\,i\varpi},\\ y&=\pm r\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}}=\pm r\frac{k\,\mathrm{sn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})\,\mathrm{cn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}=\pm kr\frac{\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi},\\ z&=\pm ir\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{D}}=\pm ir\frac{k\,\mathrm{sn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})\,\mathrm{cn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}=\pm kr\frac{\mathrm{cn}\,\psi\,.\,i\,\mathrm{sn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}.\end{aligned}\right.$$

Ce sont exactement les formules (176) que nous nous proposions de retrouver.

Cette analogie dans la forme analytique des résultats entraine, ainsi qu'il est naturel, une analogie correspondante dans le caractère géométrique du système, lequel sera déterminé sans peine en formant, par l'élimination de deux des coordonnées curvilignes entre ces trois équations, successivement les équations de chacune des trois familles coordonnées.

A cet effet, faisant, pour simplifier les écritures,

$$(179) \qquad \operatorname{sn}(\psi, k) = \Psi, \qquad \operatorname{sn}(\varpi, k') = \Pi,$$

les expressions (178) pourront s'écrire, étant élevées au carré,

$$x^2 = r^2(1-k^2\Psi^2)\Pi^2, \quad y^2 = r^2\Psi^2(1-k'^2\Pi^2), \quad z^2 = r^2(1-\Psi^2)(1-\Pi^2),$$

d'où l'on conclura en premier lieu, par simple addition,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= r^2\left[(\Pi^2-k^2\Psi^2\Pi^2)+(\Psi^2-k'^2\Psi^2\Pi^2)+\{1-(\Psi^2+\Pi^2)+\Psi^2\Pi^2\}\right] \\ &= r^2\left[1-(k^2+k'^2-1)\Psi^2\Pi^2\right] = r^2; \end{aligned}$$

puis, en second lieu, en séparant à deux reprises les variables dans chaque équation,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{x^2}{1-k^2\Psi^2} = r^2\Pi^2, & \dfrac{y^2}{\Psi^2} = r^2(1-k'^2\Pi^2), & \dfrac{z^2}{1-\Psi^2} = r^2(1-\Pi^2), \\ \dfrac{x^2}{\Pi^2} = r^2(1-k^2\Psi^2), & \dfrac{y^2}{1-k'^2\Pi^2} = r^2\Psi^2, & \dfrac{z^2}{1-\Pi^2} = r^2(1-\Psi^2); \end{array} \right.$$

et enfin, en ajoutant respectivement dans chaque ligne, chaque équation étant multipliée préalablement par un coefficient constant qui sera k^2 ou $-k'^2$, ou bien 1 ou -1,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{k^2x^2}{1-k^2\Psi^2} - \frac{y^2}{\Psi^2} + \frac{z^2}{1-\Psi^2} &= r^2\left[k^2\Pi^2 - (1-k'^2\Pi^2) + 1 - \Pi^2\right] \\ &= r^2(k^2+k'^2-1)\Pi^2 = 0, \\ \frac{x^2}{\Pi^2} - \frac{k'^2y^2}{1-k'^2\Pi^2} - \frac{z^2}{1-\Pi^2} &= r^2\left[1 - k^2\Psi^2 - k'^2\Psi^2 - (1-\Psi^2)\right] \\ &= r^2\left[1-(k^2+k'^2)\right]\Psi^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, par conséquent, eu égard à la définition des symboles Ψ et Π (179),

(180)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{k^2x^2}{\mathrm{dn}^2(\psi,k)}-\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2(\psi,k)}+\frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(\psi,k)}=0,\\ &\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2(\varpi,k')}-\frac{k'^2y^2}{\mathrm{dn}^2(\varpi,k')}-\frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(\varpi,k')}=0.\end{aligned}\right.$$

Or, il est visible que ces deux dernières équations, qui sont les analogues des deux équations (89bis) pour le cas des cylindres, représentent de même deux familles de cônes homofocaux; car, si on les fait rentrer l'une et l'autre dans le type commun des cônes du second ordre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

les carrés des demi-distances focales seront, pour la première,

$$\left\{\begin{aligned} &a^2-b^2=\frac{1}{k^2}\,\mathrm{dn}^2(\psi,k)+\mathrm{sn}^2(\psi,k)=\frac{1}{k^2}\left[\mathrm{dn}^2(\psi,k)+k^2\,\mathrm{sn}^2(\psi,k)\right]=\frac{1}{k^2},\\ &a^2-c^2=\frac{1}{k^2}\,\mathrm{dn}^2(\psi,k)-\mathrm{cn}^2(\psi,k)=\frac{1}{k^2}\left[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\psi,k)-k^2\,\mathrm{cn}^2(\psi,k)\right]=\frac{k'^2}{k^2},\end{aligned}\right.$$

et pour la seconde,

$$\left\{\begin{aligned} &a^2-b^2=\mathrm{sn}^2(\varpi,k')+\frac{1}{k'^2}\,\mathrm{dn}^2(\varpi,k')=\frac{1}{k'^2}\left[k'^2\,\mathrm{sn}^2(\varpi,k')+\mathrm{dn}^2(\varpi,k')\right]=\frac{1}{k'^2},\\ &a^2-c^2=\mathrm{sn}^2(\varpi,k')+\mathrm{cn}^2(\varpi,k')=1.\qquad(^*)\end{aligned}\right.$$

(*) Autrement, si l'on écrit comme il suit la première, par exemple, des deux équations (180), en y changeant tous les signes ainsi que l'ordre des différents termes,

$$\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2(\psi,k)}-\frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(\psi,k)}-\frac{x^2}{\frac{1}{k^2}\,\mathrm{dn}^2(\psi,k)}=0,$$

on y reconnaît à première vue, à la seule condition d'y permuter deux fois les axes des coordonnées rectilignes, la forme même (157) que nous avons donnée dans notre Cha-

Le Système Orthogonal, dans l'exemple que nous venons de traiter, se compose donc d'une famille de sphères concentriques et de deux familles de cônes homofocaux du second ordre. C'est donc, sous forme de coordonnées thermométriques cette fois, précisément le système des *Coordonnées Coniques du second ordre* que nous avons déduit comme cas-limite du système des Coordonnées Elliptiques dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 78-80), et dont nous avons ensuite fait usage à diverses reprises pour la solution de plusieurs questions intéressantes (*Ibid.*, pp. 80-94 et 176-179).

(*2e Méthode*). Quant au second procédé, visant comme but immédiat la détermination des équations des trois familles coordonnées, nous n'aurions, pour atteindre ce but, qu'à suivre une marche exactement semblable à celle qui nous a déjà conduit au même résultat lors de l'exemple analogue relatif aux cylindres, à la seule condition de substituer partout des fonctions elliptiques aux fonctions circulaires, et à calquer, en quelque sorte, en partant de cette donnée, nos raisonnements et nos procédés de calcul sur ceux que nous avons déjà présentés, précisément dans cette vue, à l'occasion dudit exemple. Toutefois le calcul par cette voie serait extrêmement laborieux, si nous voulions lui maintenir encore, comme pour le précédent, le caractère d'une recherche *a priori*, ne supposant absolument rien de connu quant au résultat à intervenir. C'est pourquoi tout en conservant les grandes lignes et les traits essentiels du calcul précité, nous présenterons celui-ci sous la forme d'une démonstration *a poste-*

---

pitre II, à l'équation (116) des surfaces homofocales du second ordre, en la rapportant, par le procédé de Lamé, à son paramètre thermométrique, ce qui démontre d'une autre façon le résultat que nous venons de formuler.

La double permutation que nous venons de dire équivaut à faire tourner de 240°, dans le sens direct, le système des axes de coordonnées rectilignes autour de la bissectrice de l'angle trièdre des coordonnées positives.

En faisant tourner semblablement, dans le sens direct, le même système, de 90° seulement autour de l'axe des x, ce qui changera y en z et z en $-y$, et équivaudra par conséquent à permuter les carrés y^2 et z^2, il est visible que le même type (157) du Chapitre II redonnera bien alors de la même façon, pour le paramètre ϖ et le module k', la seconde des équations ci-dessus (180) de nos deux familles de cônes, pour l'exemple actuel.



riori, forme qui en abrégera considérablement la longueur, sans altérer la remarquable analogie analytique que nous nous proposons de mettre en pleine lumière.

Dans cette pensée, considérant l'équation du second degré

$$(181) \qquad At^2 - Bt + C = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C sont les trois expressions

$$(182) \quad \begin{cases} A = (\mathrm{dn}\,U + \mathrm{dn}\,V)^2, \qquad C = (\mathrm{sn}\,U\,\mathrm{dn}\,V - \mathrm{sn}\,V\,\mathrm{dn}\,U)^2, \\ B = 2(1 + \mathrm{sn}\,U\,\mathrm{sn}\,V)(1 + \mathrm{dn}\,U\,\mathrm{dn}\,V - k^2\,\mathrm{sn}\,U\,\mathrm{sn}\,V), \end{cases}$$

et qui se réduira dès lors manifestement pour $k = 0$ (chacun des deltas d'amplitude devant alors être remplacé par l'unité) à l'équation du second degré (90) rencontrée dans l'exemple en question, cherchons quelles seront les deux racines, lorsqu'on la supposera exprimée en ψ et ϖ, au lieu de U et V, à l'aide des premières expressions (165).

Pour cela, nous allons calculer dans cette hypothèse les valeurs des deux rapports $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ qui représentent la somme et le produit de ces racines.

Dans ce but, convenant de représenter par D la quantité symétrique en ψ et ϖ déjà envisagée dans l'équation (175) du calcul précédent, savoir

$$(183) \quad \begin{cases} D = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,\psi\,\mathrm{sn}^2\,i\varpi \\ \quad = \mathrm{dn}^2\,\psi + k^2\,\mathrm{sn}^2\,\psi\,\mathrm{cn}^2\,i\varpi = \mathrm{dn}^2\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\varpi\,\mathrm{cn}^2\,\psi, \end{cases}$$

on trouvera tout d'abord

$$(184) \quad \mathrm{dn}\,U + \mathrm{dn}\,V = \mathrm{dn}\,(\psi + i\varpi) + \mathrm{dn}\,(\psi - i\varpi) = \frac{2}{D}\,\mathrm{dn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,i\varpi,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}\,U\,\mathrm{dn}\,V &= \mathrm{sn}\,(\psi + i\varpi)\,\mathrm{dn}\,(\psi - i\varpi) \\ &= \frac{1}{D}(\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi + \mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\psi) \\ &\quad \times \frac{1}{D}(\mathrm{dn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{D^2}\big[\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\psi.\mathrm{cn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}^2\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}^2\,\psi\,\mathrm{cn}\,\psi.\mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{cn}^2\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi$$
$$+ \mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{dn}^2\psi.\mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}^2\psi\,\mathrm{dn}\,\psi.\mathrm{sn}^2\,i\varpi\,\mathrm{cn}\,i\varpi\big].$$

250

Des quatre termes qui composent ce dernier produit, le premier et le dernier seuls sont pairs en $i\varpi$; ce seront donc les seuls qui entreront dans la somme des deux produits semblables $\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V$ et $\operatorname{sn} V \operatorname{dn} U$, qui se déduisent l'un de l'autre par le changement de U en V, ou de i en $-i$. On obtiendra donc pour cette somme la valeur

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U \\
&\qquad = \frac{2}{D^2}\left[\operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\psi . \operatorname{cn} i\varpi \operatorname{dn}^2 i\varpi + k^2 \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}^2\psi \operatorname{dn}\psi . \operatorname{sn}^2 i\varpi \operatorname{cn} i\varpi\right] \\
&\qquad = \frac{2}{D^2}\operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\psi \operatorname{cn} i\varpi\,(\operatorname{dn}^2 i\varpi + k^2 \operatorname{cn}^2\psi \operatorname{sn}^2 i\varpi) \\
&\qquad = \frac{2}{D}\operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\psi \operatorname{cn} i\varpi,
\end{aligned}$$

eu égard à la dernière expression (183) de la quantité D. De cette valeur et de l'expression (184) résultent donc en premier lieu, pour les coefficients A et C (182), celles-ci

$$(185)\qquad \left\{\begin{aligned}
A &= (\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V)^2 &&= \frac{4}{D^2}\operatorname{dn}^2\psi \operatorname{dn}^2 i\varpi, \\
C &= (\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U)^2 &&= \frac{4}{D^2}\operatorname{sn}^2\psi \operatorname{dn}^2\psi \operatorname{cn}^2 i\varpi.
\end{aligned}\right.$$

En second lieu, pour calculer semblablement le troisième coefficient B, posant, en vue de faciliter les écritures,

$$(186)\qquad \Psi = \operatorname{sn}\psi, \qquad \Pi = \operatorname{sn} i\varpi, \ (^*) \quad \text{d'où} \qquad D = 1 - k^2\Psi^2\Pi^2,$$

on trouvera de même aisément

(*) Les deux sinus d'amplitude Ψ et Π sont ici supposés pris tous les deux avec le même module donné k, contrairement à ce que nous supposons dans le précédent calcul, à l'égard des mêmes symboles, dans les notations introduites par les équations (179).

$$\operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \operatorname{sn}(\psi + i\varpi)\operatorname{sn}(\psi - i\varpi)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\Psi^2(1-\Pi^2)(1-k^2\Pi^2) - \Pi^2(1-\Psi^2)(1-k^2\Psi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\Psi^2\{1-(1+k^2)\Pi^2+k^2\Pi^4\} - \Pi^2\{1-(1+k^2)\Psi^2+k^2\Psi^4\}\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\Psi^2 - \Pi^2 + k^2\Psi^2\Pi^2(\Pi^2-\Psi^2)\right] = \frac{1}{D^2}(1-k^2\Psi^2\Pi^2)(\Psi^2-\Pi^2),$$

$$\operatorname{dn} U \operatorname{dn} V = \operatorname{dn}(\psi + i\varpi)\operatorname{dn}(\psi - i\varpi)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[(1-k^2\Psi^2)(1-k^2\Pi^2) - k^4\Psi^2\Pi^2(1-\Psi^2)(1-\Pi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1-k^2(\Psi^2+\Pi^2)+k^4\Psi^2\Pi^2 - k^4\Psi^2\Pi^2\{1-(\Psi^2+\Pi^2)+\Psi^2\Pi^2\}\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - k^4\Psi^4\Pi^4 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)(1-k^2\Psi^2\Pi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}(1-k^2\Psi^2\Pi^2)\left[1+k^2\Psi^2\Pi^2 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)\right],$$

c'est-à-dire simplement, eu égard à la valeur (186) de D,

$$\operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \frac{1}{D}(\Psi^2-\Pi^2), \qquad \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V = \frac{1}{D}\left[1+k^2\Psi^2\Pi^2 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)\right];$$

d'où l'on conclura successivement

$$1 + \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \frac{1}{D}(D + \Psi^2 - \Pi^2) = \frac{1}{D}(1 - k^2\Psi^2\Pi^2 + \Psi^2 - \Pi^2)$$

$$= \frac{1}{D}\left[\Psi^2(1-k^2\Pi^2) + 1 - \Pi^2\right] = \frac{1}{D}(\operatorname{sn}^2\psi \operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi),$$

$$1 + \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V$$

$$= \frac{1}{D}\left[(1-k^2\Psi^2\Pi^2) + \{1+k^2\Psi^2\Pi^2 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)\} - k^2(\Psi^2-\Pi^2)\right]$$

$$= \frac{2}{D}(1-k^2\Psi^2) = \frac{2\operatorname{dn}^2\psi}{D},$$

$$B = 2(1+\operatorname{sn} U \operatorname{sn} V)(1+\operatorname{dn} U \operatorname{dn} V - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{D}(\operatorname{sn}^2\psi \operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi) \cdot \frac{2\operatorname{dn}^2\psi}{D}.$$

Rapprochant alors cette dernière expression des précédentes (185), on voit que la somme et le produit des racines de l'équation proposée (181) auront respectivement pour valeurs

$$\left\{\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{\frac{4}{D^2}(\operatorname{sn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi)\operatorname{dn}^2\psi}{\frac{4}{D^2}\operatorname{dn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi} = \frac{\operatorname{sn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi} \\ &= \operatorname{sn}^2\psi + \frac{\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi}, \\ \frac{C}{A} &= \frac{\frac{4}{D^2}\operatorname{sn}^2\psi\operatorname{dn}^2\psi\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\frac{4}{D^2}\operatorname{dn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi} = \operatorname{sn}^2\psi\cdot\frac{\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi}. \end{aligned}\right.$$

D'où il appert que les deux racines de l'équation proposée sont $\operatorname{sn}^2\psi$ et $\frac{\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi} = \operatorname{sn}^2(i\varpi + K)$, lesquelles se réduisent bien effectivement, pour $k = 0$, à $\sin^2\psi$ et $\cos^2 i\varpi = \sin^2\left(i\varpi + \frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire aux deux racines de l'équation analogue (90) de l'exemple relatif aux cylindres.

Chacune de ces racines n'étant ainsi fonction que d'une seule des coordonnées ψ ou ϖ, il est clair qu'il n'y a plus de nouveau qu'à exprimer la même équation (181) en x, y, et z, au lieu de U et V, pour avoir immédiatement les équations demandées des deux familles de cônes.

A cet effet, déduisant des formules (170), tirées à l'avance des hypothèses propres à l'exemple actuel,

$$\operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \frac{1}{k^2}\frac{r^2y^2 + z^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{k^2}\frac{(x^2+y^2+z^2)y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{k^2}\frac{(x^2+y^2)y^2+z^2(y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\operatorname{dn} U \operatorname{dn} V = \frac{r^2x^2 + y^2z^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)x^2+y^2z^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)x^2+z^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

et joignant à la troisième équation (171), nous aurons donc en premier lieu les trois valeurs

$$(187)\qquad \operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V = \frac{\pm 2rx}{x^2+y^2},\qquad \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \frac{1}{k^2}\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2},\qquad \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V = \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}.$$

Tirant en second lieu des mêmes formules (170)

$$\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V = \pm \frac{1}{k} \frac{ry + izx}{x^2 + y^2} \frac{rx + iyz}{x^2 + y^2} = \pm \frac{1}{k} \frac{(r^2 - z^2)\, xy + irz\,(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

nous en déduirons successivement ces trois autres valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V = \pm \frac{1}{k} \frac{xy + irz}{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U = \pm \frac{1}{k} \frac{xy - irz}{x^2 + y^2}, \\ &\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U = \pm \frac{2}{k} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \end{aligned} \right.$$

dont la dernière, étant jointe aux précédentes (187), fournira immédiatement pour les trois coefficients A, B, C (182) les trois expressions cherchées, qui seront

$$\left\{ \begin{aligned} A &= (\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V)^2 = \frac{4r^2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ C &= (\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U)^2 = \frac{4}{k^2} \frac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ B &= 2\,(1 + \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V)\,(1 + \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V) \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2}\right)\left(1 + \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{2}{k^2} \frac{\left[k^2(x^2 + y^2) + y^2 + z^2\right]\left[(x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2)\right]}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2}{k^2} \frac{\left[y^2 + z^2 + k^2(x^2 + y^2)\right] 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

L'équation proposée (181), exprimée en x, y, z par le moyen de ces dernières valeurs, deviendra donc

$$\frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \left[r^2.t^2 - \frac{1}{k^2} \left\{ y^2 + z^2 + k^2(x^2 + y^2) \right\}.t + \frac{y^2}{k^2} \right] = 0,$$

ou, plus simplement,

(188) $$k^2(x^2 + y^2 + z^2).t^2 - \left[y^2 + z^2 + k^2(x^2 + y^2)\right].t + y^2 = 0.$$

En l'ordonnant alors par rapport à x, y, z, elle deviendra

$$(k^2t^2 - k^2t)\,x^2 + y^2\,|1 - (1 + k^2)\,t + k^2t^2| - z^2\,(t - k^2t^2) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$-\,t\,(1 - t).k^2x^2 + y^2\,(1 - t)\,(1 - k^2t) - z^2t\,(1 - k^2t) = 0,$$

et, par conséquent, en la divisant par le produit $t(1-t)(1-k^2t)$, elle pourra être écrite définitivement sous la forme

$$\frac{y^2}{t} - \frac{z^2}{1-t} - \frac{x^2}{\frac{1}{k^2}(1 - k^2t)} = 0.$$

Dès lors, ses deux racines étant $\mathrm{sn}^2\psi$ et $\mathrm{sn}^2(i\varpi + \mathrm{K})$, ainsi que nous l'avons reconnu tout d'abord, nous aurons séparément les équations

$$(189)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2\psi} - \frac{z^2}{\mathrm{cn}^2\psi} - \frac{x^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2\psi} = 0,\\ &\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2(i\varpi + \mathrm{K})} - \frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(i\varpi + \mathrm{K})} - \frac{x^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2(i\varpi + \mathrm{K})} = 0, \end{aligned}\right.$$

qui sont toutes deux réelles, nonobstant la présence apparente de l'imaginaire i dans la seconde, ainsi qu'il résulte immédiatement des formules classiques (177bis) et (176bis) déjà rappelées à l'occasion du précédent calcul.

Ces deux équations, dont la première n'est autre que la première équation déjà rencontrée (180), dans laquelle on a simplement changé les signes et interverti l'ordre des termes, représentent les deux familles de cônes relatives à l'exemple actuel. On voit qu'elles appartiennent l'une et l'autre, sauf permutation des trois axes de coordonnées rectilignes, au type (157) du Chapitre II, que nous avons donné pour les surfaces homofocales du second ordre, rapportées à leur paramètre thermométrique,



en attribuant simplement aux deux constantes, entièrement arbitraires par définition, σ et τ de ce paramètre, respectivement les valeurs 1 et 0 pour la famille ψ, et $\sqrt{-1}$ et K pour la famille ϖ.

D'ailleurs, si l'on a égard, pour la seconde de ces équations, aux formules classiques précitées (177[bis]), comme elle se changera alors dans celle-ci

$$(190) \qquad \frac{k'^2 y^2}{\mathrm{cn}^2\, i\varpi} - \frac{z^2}{\mathrm{sn}^2\, i\varpi} - k^2 x^2 = 0,$$

si on la joint alors sous cette nouvelle forme aux équations des deux autres familles qui composent le système, savoir la première (189), et celle des sphères (172), il est bien facile de s'assurer que la résolution de ces trois équations par rapport à x, y, z redonnera bien alors, comme cela doit être, les expressions (176) auxquelles nous sommes arrivés de prime abord par notre premier calcul.

Comme conclusion de cette étude, nous résumerons de nouveau, pour les mieux graver dans l'esprit du Lecteur, les résultats essentiels que nous avons obtenus pour les deux systèmes si importants, et complètement analogues, de cylindres et de cônes à la fois orthogonaux et isothermes, en formulant l'énoncé suivant, auquel nous attribuerions encore le nom de théorème, si son objet n'était pas cette fois exclusivement analytique :

Proposition. — « *Les systèmes réels, à la fois orthogonaux et* » *isothermes, composés exclusivement, soit de cylindres, soit de* » *cônes, peuvent tous être compris* (*) *dans les formules*

$$\psi = \frac{1}{2}\left[F_1(\alpha) + F_2(\beta)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2iC}\left[F_1(\alpha) - F_2(\beta)\right],$$

(*) En prenant, dans le cas des cylindres, l'axe des z parallèle à la direction commune des génératrices des deux familles.

» *dans lesquelles* F_1 *et* F_2 *représentent deux fonctions imaginaires*
» *conjuguées, c'est-à-dire telles que*

$$F_1(t) = \Psi(t) + i\Pi(t), \qquad F_2(t) = \Psi(t) - i\Pi(t),$$

» *les deux fonctions* Ψ *et* Π, *et la constante* C *étant réelles et*
» *entièrement arbitraires, et les arguments* α *et* β *seront respec-*
» *tivement les expressions*

$$\alpha = x - iy, \quad \beta = x + iy, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2}, \quad \beta = \frac{xy + irz}{x^2 + z^2},$$

» *selon qu'il s'agira des cylindres ou des cônes.*
» *En particulier, l'on obtiendra les deux types remarquables,*
» *et en quelque sorte parallèles, composés exclusivement de*
» *surfaces homofocales du second ordre, en attribuant à la*
» *constante la valeur* $C = 1$, *et prenant pour les deux fonctions*
» *conjuguées* F_1 *et* F_2 *une même fonction réelle qui sera*

$$F(t) = \text{arc sin}\,\frac{t}{l}, \qquad \textit{ou bien} \qquad F(t) = \text{Arg sn}\left(\frac{1}{k}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right),$$

» *suivant encore qu'il s'agira d'une famille de cylindres ou d'une*
» *famille de cônes* (*). »

(*) Pour qui lirait simplement ce seul énoncé, sans avoir pris connaissance des calculs par lesquels nous en établissons l'exactitude, une grave suspicion d'erreur s'élèverait sans doute aussitôt, basée sur ce fait que la seconde des expressions de la fonction $F(t)$ spécifiées à l'avant-dernière ligne semble prendre pour $k = 0$ la forme indéterminée Arg sn ∞, tandis qu'elle doit évidemment *a priori* se réduire à la première, le premier Cas (celui des cylindres) n'étant manifestement qu'une cas-limite du second.

Cette objection, qui serait parfaitement fondée si la variable t représentait la même fonction dans les deux Cas, ou tout au moins si son expression t_1, relative au premier Cas, était précisément la limite, pour $k = 0$, de son expression analogue t_2, relative au second, porte à faux dans la circonstance, en raison de ce que ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne se trouve actuellement remplie.

En effet, transportant tout d'abord le plan des yz parallèlement à lui-même en un point déterminé de l'axe des x, ce qui revient à faire

$$x = a + x', \qquad r = \sqrt{(a+x')^2 + y^2 + z^2} = a\sqrt{\left(1 + \frac{x'}{a}\right)^2 + \frac{y^2+z^2}{a^2}},$$

SYSTÈME DES COORDONNÉES SPHÉROÏDALES DU SECOND ORDRE. — 2° « *Les deux dérivées qui sont supposées nulles sont réciproques* », c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

$$\frac{Q}{\varpi} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{\varphi} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad Q = \text{const.},$$

en vertu de la condition générale (9). Or, la seconde équation (13) se réduisant alors à $Q \frac{R}{\varphi} \frac{P}{\varpi} = 0$, ne peut être vérifiée avec ces hypothèses : d'où il suit que ce second sous-cas ne peut donner naissance à aucune solution du problème.

---

puis imaginant que, la section de chacune des surfaces par le nouvean plan des yz demeurant constante, le sommet commun des cônes s'éloigne à l'infini sur l'axe des x, et supposant par conséquent que la coordonnée a grandisse indéfiniment, nous ferons tendre k vers 0 sous la condition $ka = \text{const} = l$, ou $k = \frac{l}{a}$. Il sera bien clair alors que la quantité précitée $t_2 = \frac{xy \pm irz}{x^2 + z^2}$, dont le dénominateur est du second degré en a tandis que le numérateur est du premier seulement, tendra vers la limite zéro', et qu'en même temps le rapport $\frac{t_2}{k}$, dont la valeur peut être écrite, avec notre hypothèse, en divisant les deux termes par a,

$$\frac{t_2}{k} = \frac{1}{k} \frac{(a + x')y \pm irz}{(a + x')^2 + z^2} = \frac{1}{ka} \frac{\left(1 + \frac{x'}{a}\right) y \pm i \frac{r}{a} z}{\left(1 + \frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2},$$

donnera semblablement, pour $a =$ ou $k = 0$, à cause de la valeur évidente : $\lim \frac{r}{a} = 1$,

$$\lim \frac{t_2}{k} = \frac{1}{l}(y \pm iz) = \frac{t_1}{l},$$

à la seule condition de permuter une fois les trois axes de coordonnées rectilignes dans les formules de notre théorie (et par suite de l'énoncé ci-dessus), spéciales au Cas des cylindres. De ces deux limites, ainsi calculées séparément, résultera dès lors de nouveau celle-ci

$$\lim \frac{t_2}{k\sqrt{1 + t_2^2}} = \lim \frac{t_2}{k} = \frac{t_1}{l},$$

d'où l'on voit que la seconde des expressions en question de la fonction F (t) se réduira bien, comme cela devait être, à la première, pour $k = 0$, ou $a = \infty$, c'est-à-dire lorsque la famille de cônes sera devenue une famille de cylindres parallèle à l'axe des x.

On vérifiera sans peine que la même série de considérations transformerait isolément chacune des équations de nos calculs relatifs aux cônes dans l'équation correspondante relative aux cylindres, notamment, par exemple, les deux dernières équations (176) dans les deux (89), et de même l'équation (188) de laquelle nous avons tiré, par notre seconde méthode, à la fois celles des deux familles de cônes, dans celle (90bis) qui nous avait antérieurement rendu le même service à l'occasion des systèmes de cylindres.



3° « *Les deux dérivées qui sont supposées nulles sont conjuguées* », c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

$$(191)\qquad \frac{P}{\varpi}=0,\quad \text{et}\quad \frac{Q}{\varpi}=0,\quad \text{ou}\quad P=f_2(\psi),\quad \text{et}\quad Q=f_1(\varphi),$$

en vertu des conditions générales (8) ou (9).

Avec ces hypothèses, les deux premières équations du premier ordre (13) sont vérifiées d'ores et déjà, et la troisième, qui subsiste sans modification, peut être écrite aussi bien, en la divisant par le produit PQR, et renversant l'ordre des termes,

$$(192)\qquad \frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\varphi}+\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\psi}=\frac{lP}{\psi}\frac{lQ}{\varphi}.$$

Quant au groupe du second ordre (19), la quantité G (18) se réduisant par ces hypothèses à la valeur

$$G=P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi},$$

ces trois équations (19), en faisant la substitution, et effectuant ensuite les réductions dans les deux premières, seront alors les trois suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&2PQR.Q\frac{P^2}{\psi^2}=2Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2-P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+PQ^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi},\\
&2PQR.P\frac{Q^2}{\varphi^2}=2RP^2\left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2-Q^3\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}+QP^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},\\
&2PQR\left(P\frac{R^2}{\varphi^2}+Q\frac{R^2}{\psi^2}\right)=2\left[P^2Q\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2+PQ^2\left(\frac{R}{\psi}\right)^2\right]+R\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right),
\end{aligned}\right.$$

ou encore respectivement

$$\left\{\begin{aligned}
&2Q^2R\left[P\frac{P^2}{\psi^2}-\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right]=-P\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}-Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right),\\
&2P^2R\left[Q\frac{Q^2}{\varphi^2}-\left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2\right]=\quad Q\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}-Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right),\\
&2P^2Q\left[R\frac{R^2}{\varphi^2}-\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2\right]+2PQ^2\left[R\frac{R^2}{\psi^2}-\left(\frac{R}{\psi}\right)^2\right]=R\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right).
\end{aligned}\right.$$



équations que nous pourrons écrire de nouveau, en les divisant respectivement la première par P^3Q^2R, la seconde par P^2Q^3R et la troisième par $P^2Q^2R^2$:

$$(193)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2}{P}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\right) &= -\left(\frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}\right), \\ \frac{2}{Q}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi}\right) &= \frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}, \\ \frac{2}{Q}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\right) + \frac{2}{P}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\right) &= \frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} + \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}. \end{aligned}\right.$$

Or, si nous considérons d'abord les deux premières de ces équations, nous voyons qu'elles ont le même second membre, au signe près, et que, eu égard aux hypothèses (191), les premiers membres sont, pour la première une fonction de ψ seule, et pour la seconde une fonction de la seule variable φ; d'où il suit que cette valeur absolue commune des seconds membres ne peut être qu'une constante, que nous désignerons par $4c^2$, en sorte que, ces deux équations équivalant ainsi à elles seules en réalité aux trois suivantes

$$\frac{2}{P}\frac{d^2.lP}{d\psi^2} = -\frac{2}{Q}\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2} = -\left(\frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}\right) = 4c^2,$$

les trois fonctions cherchées P, Q, R seront déterminées successivement par les trois équations

$$(194)\qquad \frac{d^2.lP}{d\psi^2} = 2c^2P, \qquad\qquad \frac{d^2.lQ}{d\varphi^2} = -2c^2Q,$$

$$(195)\qquad \frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi} = -4c^2,$$

conjointement avec l'équation (192) et la troisième (193). Or, lorsqu'on aura déterminé isolément les deux fonctions P et Q par l'intégration de chacune des équations (194), en reportant alors les valeurs ainsi trouvées dans les deux équations (192) et (195), celles-ci détermineront à la fois les deux dérivées $\frac{lR}{\varphi}$ et $\frac{lR}{\psi}$.



En conséquence, pour qu'il existe une solution correspondante à ce Cas, il faudra que deux conditions se trouvent remplies successivement, savoir : en premier lieu, que les valeurs de $\frac{lR}{\varphi}$ et $\frac{lR}{\psi}$ supposées ainsi obtenues satisfassent à la condition d'intégrabilité $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{lR}{\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{lR}{\psi}\right)$, et en second lieu, que les trois valeurs de P, Q, R ainsi successivement déterminées vérifient encore après coup la dernière équation (193). Il importe donc de reconnaître si ces deux conditions se trouveront toujours remplies par le seul fait des hypothèses (191), ou si elles exigeront pour cela l'adjonction de quelque hypothèse supplémentaire.

Pour cela, remarquant tout d'abord que la seconde équation (194), qui détermine Q, n'est autre que l'équation (115) déjà rencontrée dans le Cas antérieur IV°, sauf la dénomination de la variable indépendante, en sorte que les deux égalités (117) et (116) nous donneront de nouveau pour le Cas actuel

$$(196) \qquad Q = \frac{a^2}{c^2 \operatorname{csh}^2 (a\varphi + b)}, \qquad \left(\frac{d.lQ}{d\varphi}\right)^2 = 4a^2 - 4c^2Q;$$

puis observant que la première équation (194), qui détermine P, se déduit de la précédente en changeant simplement φ en ψ, et c^2 en $-c^2$, nous aurons semblablement, relativement à P, les égalités

$$P = \frac{a'^2}{-c^2 \operatorname{csh}^2 (a'\psi + b')}, \qquad \left(\frac{d.lP}{d\psi}\right)^2 = 4a'^2 + 4c^2P.$$

Mais, c étant supposé réel, la première de ces deux expressions n'offrira une valeur positive, comme cela est imposé par la définition (7) de P, qu'à la condition de prendre pour a' et b' des quantités imaginaires de la forme $a' = i\alpha$, $b' = i\beta$, auquel cas elles deviendront alors les suivantes :

$$(197) \qquad P = \frac{\alpha^2}{c^2 \cos^2 (\alpha\psi + \beta)} \qquad \left(\frac{d.lP}{d\psi}\right)^2 = -4\alpha^2 + 4c^2P.$$

Ces premières valeurs obtenues, tirant des deux équations

linéaires (192) et (195) celles de $\frac{lR}{\varphi}$ et $\frac{lR}{\psi}$, à savoir

$$(198)\qquad \frac{lR}{\varphi}=\frac{-4c^2\frac{lQ}{\varphi}+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\frac{lQ}{\varphi}}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2},\qquad \frac{lR}{\psi}=\frac{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2\frac{lP}{\psi}+4c^2\frac{lP}{\psi}}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2},$$

puis, déduisant des deux secondes équations précédentes (196) et (197)

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+4c^2=\frac{4a^2}{Q},\qquad \frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2-4c^2=-\frac{4\alpha^2}{P},$$

et ajoutant ensuite ces deux dernières égalités,

$$(199)\qquad \frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2=\frac{4a^2}{Q}-\frac{4\alpha^2}{P}=\frac{4}{PQ}(a^2P-\alpha^2Q),$$

nous aurons dès lors, en substituant ces trois dernières valeurs dans les expressions précédentes (198),

$$(200)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{lR}{\varphi}&=\frac{\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2-4c^2}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2}\cdot\frac{lQ}{\varphi}=\frac{-\frac{4\alpha^2}{P}}{\frac{4}{PQ}(a^2P-\alpha^2Q)}\cdot\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi}=\frac{-\alpha^2\frac{Q}{\varphi}}{a^2P-\alpha^2Q},\\ \frac{lR}{\psi}&=\frac{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+4c^2}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2}\cdot\frac{lP}{\psi}=\frac{\frac{4a^2}{Q}}{\frac{4}{PQ}(a^2P-\alpha^2Q)}\cdot\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}=\frac{a^2\frac{P}{\psi}}{a^2P-\alpha^2Q},\end{aligned}\right.$$

d'où nous conclurons immédiatement

$$d.lR=\frac{lR}{\varphi}d\varphi+\frac{lR}{\psi}d\psi=\frac{a^2\frac{P}{\psi}d\psi-\alpha^2\frac{Q}{\varphi}d\varphi}{a^2P-\alpha^2Q},$$

expression différentielle intégrable, eu égard aux hypothèses

(191), qui montre déjà que la première des conditions précitées est bien remplie, et qui donnera pour l'expression de R :

$$(201) \qquad l\mathrm{R} = l(a^2\mathrm{P} - \alpha^2\mathrm{Q}) + l.\mathrm{C}^2 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R} = \mathrm{C}^2(a^2\mathrm{P} - \alpha^2\mathrm{Q}).$$

Pour voir à présent si la seconde condition se trouve également remplie, nous n'aurons plus qu'à calculer séparément, en vue de les comparer, les valeurs qui résultent, pour chacun des deux membres de l'équation restante (193), des expressions précédentes (197), (196) et (201), auxquelles nous venons d'arriver pour les trois inconnues P, Q, R.

A cet effet, les valeurs (200) donnant

$$(202) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{l\mathrm{R}}{\varphi} &= \frac{-\alpha^2\mathrm{C}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{C}^2(a^2\mathrm{P} - \alpha^2\mathrm{Q})} \cdot \frac{1}{\mathrm{Q}} \frac{\mathrm{Q}}{\varphi} = \frac{-\alpha^2\mathrm{C}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} \frac{l\mathrm{Q}}{\varphi}, \\ \frac{l\mathrm{R}}{\psi} &= \frac{a^2\mathrm{C}^2\mathrm{P}}{\mathrm{C}^2(a^2\mathrm{P} - \alpha^2\mathrm{Q})} \cdot \frac{1}{\mathrm{P}} \frac{\mathrm{P}}{\psi} = \frac{a^2\mathrm{C}^2\mathrm{P}}{\mathrm{R}} \frac{l\mathrm{P}}{\psi}, \end{aligned} \right.$$

nous en conclurons, en premier lieu, en ayant égard aux secondes valeurs (196) et (197),

$$(203) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{Q}} \frac{l\mathrm{Q}}{\varphi} \frac{l\mathrm{R}}{\varphi} + \frac{1}{\mathrm{P}} \frac{l\mathrm{P}}{\psi} \frac{l\mathrm{R}}{\psi} &= \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}} \left[-\alpha^2 \left(\frac{l\mathrm{Q}}{\varphi} \right)^2 + a^2 \left(\frac{l\mathrm{P}}{\psi} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}} \left[-\alpha^2 (4a^2 - 4c^2\mathrm{Q}) + a^2(-4\alpha^2 + 4c^2\mathrm{P}) \right] \\ &= \frac{4\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}} \left[-2\alpha^2 a^2 + c^2 (a^2\mathrm{P} + \alpha^2\mathrm{Q}) \right], \end{aligned} \right.$$

et, en second lieu, en différentiant une seconde fois les valeurs (202),

$$\begin{aligned} \frac{d^2.l\mathrm{R}}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{l\mathrm{R}}{\varphi}\right) &= -\alpha^2\mathrm{C}^2 \left[\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} \frac{d^2.l\mathrm{Q}}{d\varphi^2} + \frac{l\mathrm{Q}}{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} \right) \right] \\ &= \frac{-\alpha^2\mathrm{C}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} \left[\frac{d^2.l\mathrm{Q}}{d\varphi^2} + \frac{l\mathrm{Q}}{\varphi} \frac{d.l}{d\varphi} \left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} \right) \right]. \end{aligned}$$



D'ailleurs, les expressions (202) et (201) donnant également

$$\frac{d.l}{d\varphi}\left(\frac{Q}{R}\right)=\frac{lQ}{\varphi}-\frac{lR}{\varphi}=\frac{lQ}{\varphi}\left(1+\frac{\alpha^2C^2Q}{R}\right)=\frac{lQ}{\varphi}\,\frac{R+\alpha^2C^2Q}{R}=\frac{C^2a^2P}{R}\,\frac{lQ}{\varphi},$$

nous aurons dès lors, en reportant dans l'expression qui précède,

$$\frac{d^2.lR}{d\varphi^2}=-\frac{\alpha^2C^2Q}{R}\left[\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2}+\frac{C^2a^2P}{R}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2\right],$$

et il est bien clair que la seconde expression (202), qui se déduit de la première en y changeant φ en ψ, Q en P, et α^2 en $-a^2$, ou a^2 en $-\alpha^2$, donnerait exactement de la même façon :

$$\frac{d^2.lR}{d\psi^2}=\frac{a^2C^2P}{R}\left[\frac{d^2.lP}{d\psi^2}-\frac{C^2\alpha^2Q}{R}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\right].$$

Par suite, ces deux dernières égalités donneront, en ayant égard ensuite successivement aux deux équations (194), puis aux égalités (199) et (201),

$$\frac{2}{Q}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R}\,\frac{R}{\varphi}\right)+\frac{2}{P}\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R}\,\frac{R}{\psi}\right)=\frac{2}{Q}\,\frac{d^2\,lR}{d\varphi^2}+\frac{2}{P}\,\frac{d^2.lR}{d\psi^2}$$

$$=\frac{2C^2}{R}\left[-\alpha^2\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2}+a^2\frac{d^2.lP}{d\psi^2}-\frac{C^2a^2\alpha^2}{R}\left\{P\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+Q\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\right\}\right]$$

$$=\frac{2C^2}{R}\left[\alpha^2.2c^2Q+a^2.2c^2P-\frac{C^2a^2\alpha^2}{R}PQ\left\{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\right\}\right]$$

$$=\frac{2C^2}{R}\left[2c^2(\alpha^2Q+a^2P)-\frac{C^2a^2\alpha^2}{R}PQ.\frac{4}{PQ}\,\frac{R}{C^2}\right]$$

$$=\frac{4C^2}{R}\left[c^2(a^2P+\alpha^2Q)-2a^2\alpha^2\right].$$

Dès lors, le simple rapprochement de cette dernière expression avec celle obtenue tout à l'heure (203) fait voir que la seconde des conditions susindiquées sera également remplie, c'est-à-dire



que la dernière équation (193), qu'il nous restait à vérifier, sera bien toujours satisfaite, sans l'adjonction d'aucune hypothèse supplémentaire, avec les expressions de P, Q, R que nous venons de trouver, savoir

$$(204)\qquad P=\frac{\alpha^2}{c^2\cos^2(\alpha\psi+6)},\qquad Q=\frac{a^2}{c^2\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)},\qquad R=C^2(a^2P-\alpha^2Q);$$

et, par conséquent, dans ce dernier Cas encore, caractérisé par les hypothèses (191), aucune impossibilité essentielle ne s'oppose jusqu'ici à ce qu'il leur corresponde une nouvelle solution du problème (*).

Cette première question, en quelque sorte préjudicielle, étant ainsi hors de cause, et ces premiers résultats étant acquis, si nous nous reportons encore au tableau (12) des courbures principales du système, afin de suivre une fois de plus la marche que nous avons constamment adoptée pour tous les différents Cas successivement examinés jusqu'ici, nous verrons qu'avec les hypothèses (191) la famille ϖ d'abord est une famille de plans. Or, ces plans ne pourront évidemment pas être supposés tous parallèles, car le raisonnement que nous avons présenté déjà à l'occasion du Cas III° (pp. 157-158) montre qu'alors les deux autres familles φ et ψ seraient nécessairement des cylindres normaux à ces plans ϖ et, par conséquent, auraient chacune une courbure principale constamment nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse (191). Cette famille de plans ϖ pourra dès lors être représentée de nouveau par une équation de la forme (25), telle que

$$(205)\qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tang}(m\varpi+n),$$

m et n désignant deux constantes provisoirement indéterminées, et la première équation (32), qui fournira donc la valeur de $\Delta_1^2\varpi$,

---

(*) Même observation que dans la note de la page 211, relative au sous-cas 1°.

en y écrivant alors m et ϖ à la place de a et φ, sera pour le Cas actuel

$$(206) \qquad m^2\Delta_1^2\varpi = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_1^2\varpi = \frac{1}{m^2(x^2+y^2)}.$$

Cela posé, si l'on raisonne à l'égard de ces plans ϖ et de chacune des deux familles φ et ψ successivement, exactement comme nous l'avons fait à l'occasion du Cas II° (pp. 144-145), au sujet des plans ϖ et de la famille ψ seulement, on verra facilement de même que les deux inconnues φ et ψ devront satisfaire dans le Cas actuel séparément aux deux équations

$$(207) \qquad y\frac{d\varphi}{dx} - x\frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad y\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

lesquelles donneront pour intégrales, en faisant, pour abréger, $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$\varphi = f_1(\rho, z) \qquad \text{et} \qquad \psi = f_2(\rho, z);$$

car aucune considération n'autorisant plus actuellement à penser que la variable indépendante z ne doive pas entrer dans l'expression des inconnues φ et ψ, cette variable doit prendre place dès lors à titre de constante dans les fonctions arbitraires introduites par l'intégration des deux équations (207). D'où il appert que les deux familles de surfaces φ et ψ se composeront dans ce cas l'une et l'autre de surfaces de révolution autour de l'axe des z.

La solution du problème pour ce dernier sous-cas 3° est donc constituée par une famille de plans méridiens et deux familles de surfaces de révolution autour du même axe, par lequel passent tous les plans (*). C'est donc le système des *Coordonnées Sphéroïdales* que nous employons sous le numéro V° dans notre

(*) Ce dernier Cas particulier nous offre, *pour la première fois*, un exemple simple et remarquable d'application de la réciproque du Théorème II de Lamé, que nous formulons dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 29), tandis que Lamé n'indique que la proposition directe seulement (formulée en premier lieu par nous dans le susdit énoncé).

En effet, dans le Cas actuel, les deux seules courbures principales supposées nulles,

Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes (page **141**, au bas), mais réduit encore aux seules surfaces de révolution capables de constituer une famille isotherme. Il ne nous reste donc plus qu'à déterminer seulement quelles sont, parmi les surfaces de cette catégorie, celles qui peuvent donner ainsi naissance à deux familles qui soient à la fois individuellement isothermes et de plus orthogonales entre elles.

Pour cela, la nature des surfaces φ et ψ étant ainsi connue, remarquons tout d'abord que la condition qui exprimera leur

---

savoir $\frac{1}{R''_1}$ et $\frac{1}{R''_2}$, étant, d'après les dénominations de Lamé, *conjuguées en surface*, mais non pas *conjuguées en arc* (voir la seconde note de la page 150), d'après le Théorème I de Lamé, démontré quelques lignes auparavant (*loc. cit.*, pp. 27-28), aucun des trois arcs d'intersection des surfaces coordonnées deux à deux n'a sa propre courbure constamment nulle, ou, ce qui est la même chose, aucun des trois rayons R, R′, R″ n'est constamment infini. Dans ces conditions, la proposition réciproque en question consiste en ce que deux des normales principales de ces mêmes arcs d'intersection feront nécessairement entre elles un angle droit. Or, effectivement, les arcs d'intersection des deux surfaces de révolution φ et ψ avec les plans méridiens ϖ n'étant autres dans le Cas actuel que les deux méridiennes elles-mêmes, et les normales principales de ces courbes étant évidemment celles situées dans leur plan commun, c'est-à-dire dans le plan méridien, il est bien clair, les surfaces φ et ψ étant orthogonales, qu'elles feront entre elles un angle droit, ainsi que l'expriment du reste nos équations subséquentes (208) ou (221).

Cette même proposition réciproque ne nous aurait fourni de conclusion précise pour aucun des différents Cas examinés jusqu'ici, parce que dans tous ces Cas, comme il est facile de le constater, il se trouvait toujours parmi les courbures principales supposées nulles au moins deux courbures qui étaient *conjuguées en arc*, en sorte que l'un des trois rayons de courbure précités R, R′, R″ était alors constamment infini, en vertu du Théorème I de Lamé (*Ibid.*). Et dans ces conditions, le second membre de la formule que traduit cette réciproque, savoir

$$\cos\omega \cos\omega' \cos\omega'' = \frac{R^2 R'^2 R''^2}{R_1 R'_1 R''_1 . R_2 R'_2 R''_2},$$

prenant alors la forme indéterminée $0 \times \infty$, il n'en résultait plus dès lors aucune conséquence nécessaire relativement à aucun des angles ω, ω', ω'' des trois normales principales entre elles : circonstance analytique qui correspondait géométriquement à ce fait, que l'un des trois arcs d'intersection au moins, étant dans chacun de ces Cas une droite, c'est-à-dire une courbe dont la normale principale est indéterminée, deux des trois angles ω, ω', ω'' étaient eux-mêmes indéterminés, ce qui rend illusoire la formule en question.

C'est sans doute dans cette rareté de l'existence *effective* de cette proposition réciproque qu'il faut chercher la raison du silence que garde Lamé à son sujet, bien qu'elle traduise exactement au même titre que la proposition directe, seule énoncée par lui, sa remarquable formule; mais on voit par cet exemple que, toute rare qu'elle soit, elle n'est pas illusoire, et que son intérêt n'est pas purement théorique.

orthogonalité réciproque, c'est-à-dire la dernière équation de droite (21), les deux premières étant déjà vérifiées sous la forme (207), signifiera simplement que leurs deux méridiennes se coupent elles-mêmes orthogonalement, et sera, par conséquent, en considérant ρ et z comme les deux coordonnées rectilignes de ces méridiennes,

$$\text{(208)} \qquad \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}=0.$$

Mais, de même que pour le Cas III°, cette condition ne sera pas d'ailleurs la seule, puisque ces deux inconnues φ et ψ, conjointement avec la troisième ϖ déjà déterminée par l'équation ci-dessus (205), devront ensemble vérifier encore les trois équations de gauche (21), c'est-à-dire celles-ci

$$\text{(209)} \qquad \Delta_1^2\varphi=\frac{1}{QR}, \qquad \Delta_1^2\psi=\frac{1}{RP}, \qquad \Delta_1^2\varpi=\frac{1}{PQ},$$

dans lesquelles P, Q, R représentant les expressions trouvées un peu plus haut (204), les invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, en raison de la même interprétation des variables ρ et z que tout à l'heure, et eu égard à l'équation ci-dessus (206), devront être remplacées par les expressions (*)

$$\Delta_1^2\varphi=\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2, \qquad \Delta_1^2\psi=\left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2, \qquad \Delta_1^2\varpi=\frac{1}{m^2\rho^2},$$

(*) Ces expressions résultent immédiatement de l'interprétation géométrique de l'invariant différentiel Δ_1, exprimée analytiquement par la formule $\Delta_1\varphi=\frac{d\varphi}{dn}$ (voir notre *Mémoire sur la Courbure des Surfaces*, formule (40bis), page 44), attendu que pour une surface de révolution, l'élément de normale dn, étant situé dans le plan méridien, se confond évidemment en grandeur et direction avec celui de la courbe méridienne elle-même.

On la retrouverait d'ailleurs bien aisément, de même que la condition (208), par voie analytique, en remarquant que pour une pareille surface $\varphi(x,y,z)=f(\rho,z)=\varphi$, où $\rho^2=x^2+y^2$, on a évidemment

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{x}{\rho}, \qquad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dy}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{y}{\rho},$$

de telle sorte qu'en faisant cette double substitution dans ces trois équations (209), on voit qu'elles auront lieu dès lors entre les seules inconnues φ et ψ, et les variables indépendantes ρ et z.

Écrivant donc ces trois équations (209), en y remettant d'abord la valeur (204) de R et celle (210) de $\Delta_1^2\varpi$, ainsi qu'il suit

$$(211)\qquad \Delta_1^2\varphi = \frac{1}{Q.C^2(a^2P - \alpha^2Q)}, \qquad \Delta_1^2\psi = \frac{1}{C^2(a^2P - \alpha^2Q).P}, \qquad \frac{1}{PQ} = \frac{1}{m^2\rho^2},$$

puis éliminant des deux premières, soit P, soit Q (c'est-à-dire par le fait ψ ou φ) à l'aide de la dernière, ce qui nous donnera les deux suivantes

$$\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{C^2(a^2m^2\rho^2 - \alpha^2Q^2)}, \qquad \Delta_1^2\psi = \frac{1}{C^2(a^2P^2 - \alpha^2m^2\rho^2)},$$

et enfin remplaçant à la fois $\Delta_1^2\varphi$ et $\Delta_1^2\psi$ par les expressions précédentes (210), ainsi que P et Q par leurs valeurs (204), puis extrayant les racines pour la dernière (211), nous obtiendrons ainsi, pour tenir lieu des trois équations de gauche (21), les trois équations

$$(212)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 &= \frac{1}{C^2a^2}\,\frac{1}{m^2\rho^2 - \dfrac{\alpha^2a^2}{c^4\,\mathrm{csh}^4(a\varphi + b)}},\\ \left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 &= \frac{-1}{C^2\alpha^2}\,\frac{1}{m^2\rho^2 - \dfrac{a^2\alpha^2}{c^4\cos^4(\alpha\psi + 6)}}. \end{aligned}\right.$$

$$(213)\qquad \mathrm{csh}\,(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + 6) = \pm\frac{a\alpha}{mc^2}\,\frac{1}{\rho}.$$

---

d'où l'on conclura, pour une surface φ isolément,

$$\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2\left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2\right] + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

et, en y adjoignant une autre surface ψ de même nature,

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho}\left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2\right] + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}.$$

(C. Q. F. D.)

Les deux inconnues φ et ψ devront donc encore dans le Cas actuel, de même que les inconnues ψ et ϖ dans le Cas III° et le sous-cas précédent 1°, satisfaire d'abord isolément à deux équations aux dérivées partielles du même type (sauf la valeur réelle ou imaginaire des constantes), et ensuite simultanément à l'équation du premier ordre (208). Mais ici la détermination est beaucoup plus complète, parce que, outre ces équations (212), elles doivent satisfaire actuellement non plus seulement à cette équation du premier ordre (208), mais encore à la dernière (213), qui ne contient les inconnues φ et ψ qu'en termes finis seulement.

Avant d'effectuer cette détermination, vidons tout d'abord une question qui s'offre d'elle-même à l'esprit, aussitôt que le problème analytique est posé dans les termes que nous venons de dire, et dont l'examen va nous conduire à une conséquence importante pour la suite du calcul.

Si nous adjoignons aux quatre équations que nous venons d'indiquer, entre les deux inconnues φ et ψ et les variables indépendantes, les deux autres du premier ordre que l'on peut former immédiatement par la différentiation en ρ et z de la dernière (213), et qui seront, en prenant simplement les dérivées logarithmiques de ladite équation,

$$(214)\quad \left\{\begin{aligned} &a \operatorname{tgh}(a\varphi + b).\frac{d\varphi}{d\rho} - \alpha \operatorname{tang}(\alpha\psi + 6).\frac{d\psi}{d\rho} = -\frac{1}{\rho},\\ &a \operatorname{tgh}(a\varphi + b).\frac{d\varphi}{dz} - \alpha \operatorname{tang}(\alpha\psi + 6).\frac{d\psi}{dz} = 0,\end{aligned}\right.$$

comme l'on aura alors un total de six équations entre les six quantités φ, $\frac{d\varphi}{d\rho}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\rho}$, $\frac{d\psi}{dz}$, et les variables indépendantes ρ et z, en admettant que ces six équations fussent toutes distinctes et compatibles, comme elles suffiraient alors à déterminer algébriquement ces six quantités en ρ et z, les expressions obtenues de cette façon pour φ et ψ constitueraient une solution *singulière* du problème (c'est-à-dire sans constante introduite par l'intégration), si les valeurs qu'elles fourniraient directement par la diffé-

rentiation en ρ et z coïncidaient bien effectivement avec les valeurs correspondantes obtenues en même temps par la résolution totale du système que nous venons de spécifier : double condition dont il importe, par conséquent, de s'assurer, si l'on veut être sûr de ne laisser échapper aucune solution du problème.

A cet effet, visant, comme but immédiat, en vue d'obtenir finalement les expressions de φ et ψ en question, à former, par l'élimination des quatre dérivées précitées, une seconde équation analogue à (213), c'est-à-dire ne contenant φ et ψ qu'en termes finis seulement, nous élèverons les deux équations (214) au carré, ce qui nous donnera

$$\left\{\begin{aligned} & a^2 \,\text{tgh}^2 (a\varphi + \beta).\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + \alpha^2 \,\text{tang}^2 (\alpha\psi + \beta).\left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)^2 \\ & \qquad - 2a\alpha \,\text{tgh} (a\varphi + b)\, \text{tang} (\alpha\psi + \beta).\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}, \\ & a^2 \,\text{tgh}^2 (a\varphi + b).\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \alpha^2 \,\text{tang}^2 (\alpha\psi + \beta).\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 \\ & \qquad - 2a\alpha \,\text{tgh} (a\varphi + b)\, \text{tang} (\alpha\psi + \beta).\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz} = 0, \end{aligned}\right.$$

et si nous ajoutons alors ces deux dernières, en tenant compte des deux (212), ou, ce qui est la même chose, des deux premières (210) et (209), ainsi que de l'équation (208), nous formerons par là celle-ci, qui pourra dès lors être substituée à l'une quelconque des six équations du système en question, et ne contiendra plus que φ, ψ, et ρ seulement :

$$(215) \qquad a^2 \,\text{tgh}^2 (a\varphi + b).\frac{1}{QR} + \alpha^2 \,\text{tang}^2 (\alpha\psi + \beta).\frac{1}{RP} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Or, on reconnaît sans calcul que cette équation ne pourra servir, comme on avait pu l'espérer, à déterminer, conjointement avec l'équation (213), les deux inconnues φ et ψ en ρ et z. En effet, elles ne contiennent l'une et l'autre que la seule variable indépendante ρ, à l'exclusion de z ; en admettant donc qu'elles

fussent distinctes et compatibles, comme elles donneraient dans ce cas deux valeurs telles que

$$\varphi = \mathcal{F}_1(\rho), \qquad \psi = \mathcal{F}_2(\rho),$$

on voit qu'il existerait alors nécessairement entre les deux seules inconnues φ et ψ une relation de la forme $F(\varphi, \psi) = 0$, hypothèse inadmissible *a priori*, du moment que les trois variables φ, ψ, ϖ constituent par définition un système de coordonnées. D'où il résulte immédiatement qu'il n'existe aucune solution singulière du problème engendrée de la manière que nous avons indiquée.

Nous arriverons aisément à la même conclusion par un calcul direct, qui aura l'avantage en outre de nous révéler une relation nécessaire entre les constantes, dont la suite du calcul permettra d'apprécier l'importance.

En effet, si, après avoir multiplié par R l'équation que nous venons de former (215), nous y remplaçons alors cette même quantité R par sa valeur (204), ainsi que $\frac{1}{\rho^2}$ par celle déduite de la dernière équation (211), ce qui la transformera dans la suivante

$$\begin{aligned} a^2 \operatorname{tgh}^2(a\varphi + b).\frac{1}{Q} + \alpha^2 \operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6).\frac{1}{P} &= \frac{m^2}{PQ}.C^2(a^2P - \alpha^2Q) \\ &= m^2C^2\left(\frac{a^2}{Q} - \frac{\alpha^2}{P}\right), \end{aligned}$$

et que nous y remettions alors semblablement à la place de P et Q leurs valeurs (204), elle se réduira par cette substitution simplement à celle-ci

$$\begin{aligned} c^2\left[\operatorname{snh}^2(a\varphi + b) + \sin^2(\alpha\psi + 6)\right] &= m^2C^2.c^2\left[\operatorname{csh}^2(a\varphi + b) - \cos^2(\alpha\psi + 6)\right] \\ &= m^2C^2.c^2\left[1 + \operatorname{snh}^2(a\varphi + b) - \{1 - \sin^2(\alpha\psi + 6)\}\right], \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, à la suivante

$$(1 - m^2C^2)\left[\operatorname{snh}^2(a\varphi + b) + \sin^2(\alpha\psi + 6)\right] = 0,$$

dans laquelle le second facteur, ne renfermant que les deux

variables φ et ψ, complètement indépendantes l'une de l'autre, ne peut évidemment être supposé nul, et qui dès lors exigera pour être satisfaite que les constantes m et C vérifient la relation

(216) $$1 - m^2C^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad C^2 = \frac{1}{m^2},$$

auquel cas, l'équation précédente devenant alors une identité, il n'existera plus que *cinq* équations seulement entre les six quantités φ, $\frac{d\varphi}{d\rho}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\rho}$, $\frac{d\psi}{dz}$: ce qui montre par conséquent de nouveau l'impossibilité de la solution singulière dont nous nous proposions de reconnaître l'existence.

De là il est facile à présent de conclure, avant tout calcul, que la solution définitive du problème ne comportera plus seulement qu'une constante arbitraire nouvelle, en sus de celles déjà introduites, et non plus aucune fonction arbitraire, comme dans les deux Cas susmentionnés des cylindres et des cônes.

En effet, comme on pourra du moins résoudre les cinq équations que nous venons de dire par rapport à cinq des quantités précitées, soit par exemple $\frac{d\varphi}{d\rho}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\rho}$, $\frac{d\psi}{dz}$, on obtiendra par cette résolution, en particulier pour les dérivées de φ, des valeurs telles que

(217) $$\frac{d\varphi}{d\rho} = \Phi_1(\varphi, \rho), \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \Phi_2(\varphi, \rho),$$

la variable z n'entrant explicitement dans aucune des équations en question, et dès lors l'intégration de l'équation différentielle totale

(218) $$d\varphi = \Phi_1 d\rho + \Phi_2 dz$$

achèvera la solution avec une seule constante arbitraire, car l'inconnue φ étant ainsi déterminée, l'équation en termes finis (**213**) fournira dès lors immédiatement l'expression de la seconde inconnue ψ.

Les calculs que nous venons d'indiquer deviendront évidem-

ment beaucoup plus simples et plus faciles, si dans les mêmes équations nous intervertissons les variables indépendantes et les inconnues, c'est-à-dire si nous prenons φ et ψ pour les premières, et ρ et z pour les secondes; attendu que ladite équation en termes finis (213) ne contenant plus alors que la seule inconnue ρ, les deux expressions analogues aux fonctions Φ_1 et Φ_2 (217), savoir $\frac{dz}{d\varphi} = Z_1$ et $\frac{dz}{d\psi} = Z_2$, que l'on obtiendra par un procédé tout semblable, ne contiendront pas z non plus, mais seulement φ et ψ; en sorte que l'intégration de l'équation

$$dz = Z_1 d\varphi + Z_2 d\psi$$

se réduira à une simple quadrature, au lieu d'avoir à intégrer une équation différentielle totale telle que (218). En outre, en suivant cette voie, la valeur de l'inconnue ρ est d'ores et déjà fournie par l'équation (213), qui donne immédiatement

$$(219) \qquad \rho = \pm \frac{a\alpha}{mc^2} \frac{1}{\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + 6)},$$

en sorte qu'il n'y a plus qu'à rechercher séparément la valeur de la seule inconnue z.

Adoptant donc ce second mode de calcul, qui présente ainsi un avantage considérable sur le premier, et ayant en vue le dernier objet que nous venons de dire, nous rappellerons encore une fois, comme nous l'avons déjà fait à l'occasion du Cas III° (page 160), les formules (16) et (17) de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 18), lesquelles, en y faisant $y = 0$, et par suite $x = \rho$, nous donneront, à la place des deux premières formules de gauche et de la dernière de droite (17) en question, celles-ci

$$(220) \qquad H = \Delta_1^{-2}\varphi = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2,$$

$$(221) \qquad \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\rho}{d\psi} + \frac{dz}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} = 0,$$

cette dernière tenant évidemment lieu de notre équation (208), du moment qu'elles expriment aussi bien l'une que l'autre l'orthogonalité des deux familles φ et ψ. D'où il suit que nos deux premières équations (211), ou (212), se transformeront, en prenant les inverses des deux membres, par l'échange des variables indépendantes et des inconnues, dans celles-ci

$$(222)\qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=\mathrm{Q.C}^2(a^2\mathrm{P}-\alpha^2\mathrm{Q}),\qquad \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2=\mathrm{P.C}^2(a^2\mathrm{P}-\alpha^2\mathrm{Q}),$$

tandis que la dernière équation en termes finis (213) ou (219), n'étant pas modifiée par cette nouvelle interprétation des variables, donnera, en prenant la dérivée logarithmique de la seconde forme successivement par rapport à φ et ψ,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d.l\rho}{d\varphi}&=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left[-\log \operatorname{csh}(a\varphi+b)\right]=-\frac{a \operatorname{snh}(a\varphi+b)}{\operatorname{csh}(a\varphi+b)},\\ \frac{d\ l\rho}{d\psi}&=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\psi}=\frac{d}{d\psi}\left[-\log\cos(\alpha\psi+6)\right]=\frac{\alpha\sin(\alpha\psi+6)}{\cos(\alpha\psi+6)},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en multipliant par ρ, et faisant abstraction des premiers et troisièmes membres,

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-\rho.a\operatorname{tgh}(a\varphi+b),\qquad \frac{d\rho}{d\psi}=\rho.\alpha\operatorname{tang}(\alpha\psi+6).$$

Nous aurons, par conséquent, en élevant au carré, et ayant égard de nouveau à la troisième équation (211), la première des deux expressions

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{\mathrm{PQ}}{m^2}.a^2\operatorname{tgh}^2(a\varphi+b),\qquad \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2=\frac{\mathrm{PQ}}{m^2}.\alpha^2\operatorname{tang}^2(\alpha\psi+6),$$

et, si nous reportons maintenant ces deux dernières expressions dans les équations précédentes (222), nous en tirerons alors,

pour les carrés des deux quantités que nous avons appelées tout à l'heure Z_1 et Z_2,

$$\left\{\begin{aligned} Z_1^2 &= \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = Q.C^2(a^2P - \alpha^2Q) - \frac{PQ}{m^2}.a^2 \operatorname{tgh}^2(a\varphi + b),\\ Z_2^2 &= \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2 = P.C^2(a^2P - \alpha^2Q) - \frac{PQ}{m^2}.\alpha^2 \operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6),\end{aligned}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{aligned} Z_1^2 &= C^2Q\left[a^2P\left(1 - \frac{1}{C^2m^2}\operatorname{tgh}^2(a\varphi + b)\right) - \alpha^2Q\right],\\ Z_2^2 &= C^2P\left[a^2P - \alpha^2Q\left(1 + \frac{1}{C^2m^2}\operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6)\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Or, il est très facile de voir que ces expressions des dérivées Z_1 et Z_2 rempliront bien la condition d'intégrabilité en vertu de la relation nécessaire (216) entre les constantes C et m (*), car la première de ces deux dernières égalités devient par cette condition, en ayant égard de nouveau aux valeurs (204) de P et Q,

$$\begin{aligned} Z_1^2 &= C^2Q\left[a^2P\left(1 - \frac{\operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}\right) - \alpha^2Q\right]\\ &= C^2Q\left[c^2P.\frac{a^2}{c^2}\,\frac{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b) - \operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} - \alpha^2Q\right]\\ &= C^2Q\,[c^2P.Q - \alpha^2Q] = C^2Q^2\left(c^2\frac{\alpha^2}{c^2\cos^2(\alpha\psi + 6)} - \alpha^2\right)\\ &= C^2Q^2\alpha^2\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha\psi + 6)} - 1\right) = C^2Q^2\alpha^2\operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6),\end{aligned}$$

(*) On voit par là l'importance de cette relation (216) dans la théorie, car si nous n'eussions pas démontré tout d'abord sa *nécessité*, il est clair que la même solution à laquelle nous allons arriver tout à l'heure, étant obtenue dans cette hypothèse en établissant *arbitrairement*, pour les besoins de l'intégration, la même relation entre les constantes, ne saurait plus être acceptée que comme une solution particulière intéressante du problème spécial au Cas envisagé, la question de la recherche de la solution la plus générale relative à ce même Cas demeurant absolument entière comme auparavant.

et la seconde deviendra de la même façon

$$\begin{aligned}
Z_2^2 &= C^2P\left[a^2P - \alpha^2Q\left(1 + \operatorname{tang}^2(\alpha\psi + \beta)\right)\right] \\
&= C^2P\left[a^2P - c^2Q.\frac{\alpha^2}{c^2}\frac{1}{\cos^2(\alpha\psi + \beta)}\right] = C^2P\left[a^2P - c^2Q.P\right] \\
&= C^2P^2\left(a^2 - c^2\frac{a^2}{c^2\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}\right) = C^2P^2a^2\left(1 - \frac{1}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}\right) \\
&= C^2P^2a^2\,\frac{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b) - 1}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} = C^2P^2a^2\operatorname{tgh}^2(a\varphi + b).
\end{aligned}$$

D'où il résultera, en extrayant les racines, pour Z_1 et Z_2, les valeurs

$$(223) \qquad Z_1 = \pm CQ\alpha\operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta), \qquad Z_2 = \pm CPa\operatorname{tgh}(a\varphi + b),$$

expressions qui donneront, en ayant égard de nouveau aux valeurs (204),

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dZ_1}{d\psi} &= \pm CQ\alpha\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\psi + \beta)} = \pm\frac{C}{c^2}\frac{a^2\alpha^2}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)\cos^2(\alpha\psi + \beta)}, \\
\frac{dZ_2}{d\varphi} &= \pm CPa\frac{a}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} = \pm\frac{C}{c^2}\frac{\alpha^2a^2}{\cos^2(\alpha\psi + \beta)\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)},
\end{aligned}\right.$$

et satisfont par conséquent à la condition d'intégrabilité $\frac{dZ_1}{d\psi} = \frac{dZ_2}{d\varphi}$, à la seule condition de prendre le même signe devant les deux expressions.

Nous aurons donc dès lors, avec les valeurs (223), pour expression de la différentielle dz,

$$\begin{aligned}
dz &= Z_1d\varphi + Z_2d\psi = \pm CQ\alpha\operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta)\,d\varphi \pm CPa\operatorname{tgh}(a\varphi + b)\,d\psi \\
&= \pm C\left[\alpha\operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta).\frac{a}{c^2}\frac{ad\varphi}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} + a\operatorname{tgh}(a\varphi + b).\frac{\alpha}{c^2}\frac{\alpha d\psi}{\cos^2(\alpha\psi + \ldots} \right. \\
&= \pm\frac{Ca\alpha}{c^2}\left[\operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta).d\operatorname{tgh}(a\varphi + b) + \operatorname{tgh}(a\varphi + b).d\operatorname{tang}(\alpha\psi + \ldots\right.
\end{aligned}$$

et par conséquent, en conservant comme arbitraire la constante m, et introduisant, pour abréger l'écriture, à la place de la con-

stante c, la nouvelle constante $l = \frac{Ca\alpha}{c^2} = \frac{a\alpha}{mc^2}$, nous aurons, en intégrant, pour l'inconnue z, définitivement la valeur

$$(224) \qquad z = z_0 \pm l \,\text{tgh}\,(a\varphi + b)\,\text{tang}\,(\alpha\psi + 6),$$

tandis que l'expression (219) de ρ, obtenue de prime abord, deviendra, en y introduisant la même constante l,

$$(225) \qquad \rho = \pm \frac{l}{\text{csh}\,(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + 6)}.$$

La possession de ces deux derniers résultats permettra maintenant, conjointement avec l'équation (205), d'obtenir aisément l'expression des trois coordonnées x, y, z, en fonction des coordonnées φ, ψ, ϖ, qui est essentiellement le but qu'il s'agissait d'atteindre.

En effet, cette équation (205) donnant immédiatement

$$y = x \,\text{tang}\,(m\varpi + n),$$

et par suite

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = x^2\left[1 + \text{tang}^2(m\varpi + n)\right] = \frac{x^2}{\cos^2(m\varpi + n)},$$

on déduira successivement de ces deux égalités

$$\pm\rho = \frac{x}{\cos(m\varpi + n)}, \qquad x = \pm\rho\cos(m\varpi + n), \qquad y = \pm\rho\sin(m\varpi + n),$$

et dès lors, en se reportant aux valeurs (225) et (224), que nous venons de trouver pour ρ et z, on obtiendra les trois expressions

$$(226) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \pm l \frac{\cos(m\varpi + n)}{\text{csh}\,(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + 6)}, \\ y &= \pm l \frac{\sin(m\varpi + n)}{\text{csh}\,(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + 6)}, \\ z &= \pm l \,\text{tgh}\,(a\varphi + b)\,\text{tang}\,(\alpha\psi + 6) + z_0, \end{aligned}\right.$$

qui renferment, comme on le voit, outre la constante additive z_0, sept constantes arbitraires, l, m, n, a, b, α et β.

Un dernier point reste à éclaircir, pour traiter ce dernier sous-cas avec la même précision que les Cas précédents, à savoir la détermination exacte au point de vue géométrique des deux surfaces de révolution φ et ψ qui entrent alors dans la composition du système, et ce dernier résultat, outre son importance propre, nous conduira à une conséquence analytique intéressante, qui eût échappé à une recherche directe, et qu'il n'était d'ailleurs évidemment pas possible de prévoir.

Ce dernier calcul se bornant simplement à éliminer successivement ψ et φ entre les deux équations (225) et (224), nous les récrirons à cet effet l'une et l'autre comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + \beta) = \pm \frac{l}{\rho}, \\ &\operatorname{snh}(a\varphi + b)\sin(\alpha\psi + \beta) = \pm \frac{z - z_0}{l}\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + \beta) = \pm \frac{z -}{\rho} \end{aligned}\right.$$

Puis tirant de là successivement

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{csh}(a\varphi + b) = \pm \frac{l}{\rho}\frac{1}{\cos(\alpha\psi + \beta)}, \qquad \operatorname{snh}(a\varphi + b) = \pm \frac{z - z_0}{\rho}\frac{1}{\sin(\alpha\psi +} \\ &\cos(\alpha\psi + \beta) = \pm \frac{l}{\rho}\frac{1}{\operatorname{csh}(a\varphi + b)}, \qquad \sin(\alpha\psi + \beta) = \pm \frac{z - z_0}{\rho}\frac{1}{\operatorname{snh}(a\varphi +} \end{aligned}\right.$$

et ayant alors égard aux deux formules parallèles

$$(227) \qquad \operatorname{csh}^2 u - \operatorname{snh}^2 u = 1, \qquad \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

nous trouverons sans peine pour les deux équations demandées

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{l^2}{\rho^2}\frac{1}{\cos^2(\alpha\psi + \beta)} - \frac{(z - z_0)^2}{\rho^2}\frac{1}{\sin^2(\alpha\psi + \beta)} = 1, \\ &\frac{l^2}{\rho^2}\frac{1}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} + \frac{(z - z_0)^2}{\rho^2}\frac{1}{\operatorname{snh}^2(a\varphi + b)} = 1; \end{aligned}\right.$$



équations qui pourront encore être écrites, en les multipliant respectivement par $\rho^2 \cos^2(\alpha\psi + \beta)$ et $\rho^2 \operatorname{csh}^2(a\varphi + b)$, et les transposant ensuite,

$$(228)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\rho^2}{\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)}} + \frac{(z-z_0)^2}{\dfrac{\operatorname{snh}^2(a\varphi+b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)}} = l^2, \\ &\frac{\rho^2}{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha\psi+\beta)}} + \frac{(z-z_0)^2}{\dfrac{\sin^2(\alpha\psi+\beta)}{\cos^2(\alpha\psi+\beta)}} = l^2, \end{aligned}\right. \quad (*)$$

et représenteront par suite, en coordonnées rectilignes ρ et z, deux coniques, dont les demi-distances focales ont pour carrés respectivement, eu égard aux deux formules classiques (227),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{l^2}{\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)} + \frac{l^2\operatorname{snh}^2(a\varphi+b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)} = l^2\,\frac{1+\operatorname{snh}^2(a\varphi+b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)} = l^2, \\ &\frac{l^2}{\cos^2(\alpha\psi+\beta)} - \frac{l^2\sin^2(\alpha\psi+\beta)}{\cos^2(\alpha\psi+\beta)} = l^2\,\frac{1-\sin^2(\alpha\psi+\beta)}{\cos^2(\alpha\psi+\beta)} = l^2, \end{aligned}\right.$$

ce qui montre que les méridiennes des deux familles de surfaces de révolution sont deux familles de coniques homofocales, qui sont manifestement toutes des hyperboles pour la première, et de même des ellipses pour la seconde.

Voici maintenant en quoi consiste le fait analytique sur lequel nous nous proposons d'appeler l'attention.

Comme nous l'avons déjà observé à propos de deux Cas précédents, à partir du moment où nous avons reconnu que le système orthogonal se composait dans l'hypothèse actuelle d'une famille

---

(*) Ces équations coïncident bien effectivement avec celles que Lamé obtient, en les rapportant par sa méthode à leurs paramètres thermométriques, pour les surfaces de révolution du second ordre homofocales. [Voir, pour la première famille, *Leçons sur les Fonctions Inverses*, § XVI, équation (14), page 23, en se reportant à notre note relative au Cas précédent IV° (page 205 de ce Mémoire); et pour la seconde famille LAMÉ, *ibid.*, § XV, équation (10), page 21.]



de plans méridiens, et de deux familles de surfaces de révolution, il est bien clair que le problème se réduisait alors à déterminer, ainsi que nous l'avons fait pour les susdits Cas des cylindres et des cônes (pp. 170-171 et 227), le système le plus général de deux familles de surfaces de révolution à la fois isothermes et orthogonales entre elles, conditions qui, eu égard à l'expression classique de l'invariant Δ_2 en coordonnées cylindriques, déjà rappelée dans notre Chapitre II [voir la note de la page 62, formules (6)], eussent été exprimées pour les familles φ et ψ par les trois équations

$$(229)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \dfrac{d^2\varphi}{dz^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\varphi}{d\rho} = 0, \qquad \dfrac{d^2\psi}{d\rho^2} + \dfrac{d^2\psi}{dz^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\psi}{d\rho} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{d\varphi}{d\rho}\dfrac{d\psi}{d\rho} + \dfrac{d\varphi}{dz}\dfrac{d\psi}{dz} = 0, \end{array} \right.$$

complètement analogues aux équations (74) ou (157), relatives aux deux Cas que nous venons de rappeler. Et il est bien clair qu'il y a dès lors identité absolue entre la solution de ce dernier problème analytique ainsi formulé, et celle qui complète, conjointement avec l'équation (205) des plans méridiens, le système triple orthogonal primitivement demandé, en sorte qu'il soit indifférent d'obtenir cette solution par l'intégration directe de ce dernier système (229), ou par celle des équations qui nous ont conduit au résultat formulé par les équations (228), ou (224) et (225).

Or il se présente cette circonstance singulière, que tandis que pour les cylindres et les cônes, c'est-à-dire pour le système à coefficients constants (74) ou (157), la solution la plus générale, représentée par les deux équations (86) ou (158), renferme les deux *fonctions* arbitraires $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ du type (68), c'est-à-dire par conséquent les deux fonctions entièrement arbitraires Ψ et Π, pour le système (229), au contraire, qui ne diffère du précédent que par l'introduction dans les deux premières équations d'un même terme du premier ordre, à coefficient variable et d'ailleurs très simple, la solution la plus générale pour ce système, savoir

celle obtenue tout à l'heure, qui est représentée pour les deux équations (228), ou (224) et (225), ne renferme plus simplement que les cinq *constantes* arbitraires a, b, α, β, et l, et la constante simplement additive z_0.

Si l'on tient compte en outre de ce fait, que, de même que pour l'équation (136) du sous-cas précédent 1°, ni la méthode de Laplace, ni la méthode d'Ampère ne réussissent pour l'intégration isolée des deux équations du second ordre (229), lesquelles n'admettent pas non plus d'intégrale intermédiaire (*), en sorte que la même voie qui nous a conduits tout naturellement à l'intégration du système (74) nous eût été fermée pour ce dernier système (229), on voit ainsi que les résultats que nous venons de rencontrer comme solution de notre problème général pour ce dernier Cas particulier V° (sous-cas 3°), outre leur intérêt propre relativement à ce problème, nous ont encore révélé une sorte d'anomalie analytique très curieuse, qui fournirait peut-être quelque indication utile pour la théorie, non encore faite, des systèmes d'équations aux dérivées partielles simultanées entre plusieurs inconnues, et qu'il eût été en tout cas fort difficile d'apercevoir en envisageant directement la question analytique posée par les seules équations (229), en dehors du

(*) Cette circonstance, qui n'est une pierre d'achoppement que pour la méthode d'Ampère seule, persiste évidemment quelles que soient les variables indépendantes que l'on introduise. La méthode de Laplace, au contraire, qui n'exige pas la même condition que celle d'Ampère, peut fort bien, pour la même équation, échouer avec certaines variables indépendantes, et réussir avec d'autres. Dans cette pensée, nous avons essayé d'introduire dans la première équation (229) successivement différents systèmes de variables indépendantes, parmi lesquelles nous indiquerons en particulier les variables $u = \rho + iz$, $v = \rho - iz$, analogues à celles employées pour les Cas précités des Cylindres et des Cônes, qui ramènent cette équation au type plus symétrique

$$2(u+v)\frac{d^2\varphi}{du\,dv} + \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv} = 0,$$

dont Lamé fait dépendre la recherche de la solution la plus générale du problème, ainsi que nous le dirons dans l'un des Chapitres suivants de ce Mémoire, et dont l'intégrale générale, si on pouvait l'obtenir, présenterait à ce double point de vue un véritable intérêt. Mais aucun des systèmes, ainsi essayés par nous, ne nous a permis l'emploi de la méthode de Laplace à l'équation précitée du second ordre du type (229).

problème plus général, dont la recherche nous a amené incidemment à cette constatation.

Nous en dirions autant, avec la même raison, de la solution la plus générale elle-même du système (229), à savoir celle représentée par les deux équations (228), et qui montrent que les seules surfaces de révolution autour du même axe, capables de constituer deux familles à la fois isothermes et orthogonales entre elles, sont exclusivement des surfaces du second ordre homofocales, en y comprenant toujours, bien entendu, leurs cas-limites, c'est-à-dire les paraboloïdes, les cônes, et les cylindres, ainsi que nous le faisons dans notre Chapitre II (pages 100-101), à l'occasion de l'équation (116).

Ayant ainsi épuisé dans ce Chapitre tous les cas particuliers où l'on suppose nulle quelqu'une des six dérivées sur lesquelles a porté toute cette discussion [puisque, d'après l'équation (15), on ne peut supposer nulle une seule d'entre elles seulement], nous allons traiter maintenant, dans la Seconde Partie de ce Mémoire, le Cas le plus général, c'est-à-dire celui où ces dérivées sont supposées recevoir une valeur quelconque, sauf la valeur zéro qui correspond aux Cas successivement étudiés dans cette Première Partie.

SECONDE PARTIE

CAS GÉNÉRAL DU PROBLÈME ET APPLICATIONS.

—

CHAPITRE IV.

Détermination, pour le cas le plus général, en fonction des coordonnées curvilignes, des trois invariants différentiels Δ_1 relatifs à ces coordonnées.

Réduction de ce problème a la recherche séparée de trois fonctions d'une seule variable. — La première moitié de la tâche que nous nous sommes imposée consiste, avons-nous dit au début du Chapitre précédent (pages 123 et 135), à déterminer de la façon la plus générale, en fonction des coordonnées curvilignes elles-mêmes, les trois invariants différentiels Δ_1 correspondant à ces trois coordonnées, ou, ce qui revient au même, à déterminer les trois fonctions de deux variables seulement P, Q, R, que nous leur avons substituées comme inconnues, à l'aide des six équations (13) d'une part, et (19) de l'autre, les trois premières, qui sont du premier ordre et se réduisent à deux distinctes seulement, pouvant être remplacées, si l'on veut, par les deux équations (15) et (17).

La voie qu'il nous faut parcourir pour parvenir à ce but étant assez longue et hérissée d'obstacles qui nous obligeront à des sinuosités ou des détours, capables de faire perdre de vue le fil conducteur des calculs, nous la fractionnerons encore une fois en une série de sept étapes successives, que l'on nous permettra d'accuser nettement (malgré le caractère exclusivement analytique de la méthode) en énonçant en tête de chacune le terme ou résultat auquel elle devra nous conduire, ainsi qu'un usage constant s'en est établi, depuis Euclide, pour l'exposition et l'enseignement des Éléments de la Géométrie. De cette façon, la route se trouvant jalonnée en quelque sorte en ses points remarquables, une fois parvenu au but, l'esprit du Lecteur embrassera facilement d'un seul coup d'œil, et se remémorera aisément toute la carrière parcourue, malgré sa longueur, ses obstacles et ses détours.

1° « *Les trois inconnues* P, Q, R *ne dépendent que de six fonctions d'une seule variable.* » — Occupons-nous d'abord du groupe d'équations du premier ordre (13). Différentiant par rapport à φ la première équation, nous trouverons, eu égard aux hypothèses (8) ou (9),

$$P\left(\frac{Q^2}{\varpi\varphi}\frac{R}{\psi}+\frac{Q}{\varpi}\frac{R^2}{\psi\varphi}\right)=\frac{P}{\varpi}\left(Q\frac{R^2}{\psi\varphi}+\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}\right)+\frac{P}{\psi}\left(R\frac{Q^2}{\varpi\varphi}+\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}\right),$$

ou simplement, en ayant égard à l'équation de remplacement (15),

$$\left(P\frac{Q}{\varpi}-Q\frac{P}{\varpi}\right)\frac{R^2}{\varphi\psi}=\left(R\frac{P}{\psi}-P\frac{R}{\psi}\right)\frac{Q^2}{\varpi\varphi};$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons évidemment, en agissant de même à l'égard de l'une quelconque des deux autres équations (13), les deux équations du second ordre

$$(1)\qquad \left(Q\frac{R}{\varphi}-R\frac{Q}{\varphi}\right)\frac{P^2}{\psi\varpi}=\left(R\frac{P}{\psi}-P\frac{R}{\psi}\right)\frac{Q^2}{\varpi\varphi}=\left(P\frac{Q}{\varpi}-Q\frac{P}{\varpi}\right)\frac{R^2}{\varphi\psi}.$$

Or, ayant examiné séparément dans le Chapitre précédent tous les Cas particuliers pour lesquels l'une quelconque des six dérivées premières qui figurent dans ces équations est supposée constamment nulle, nous devrons maintenant exclure cette hypothèse, ou en d'autres termes supposer expressément que chacune d'elles est en général, c'est-à-dire sauf en des points exceptionnels, différente de zéro. Ayant donc mis les trois équations (13) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{R}{\psi}\left(P\frac{Q}{\varpi}-Q\frac{P}{\varpi}\right)=R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi},\\&\frac{P}{\varpi}\left(Q\frac{R}{\varphi}-R\frac{Q}{\varphi}\right)=P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi},\\&\frac{Q}{\varphi}\left(R\frac{P}{\psi}-P\frac{R}{\psi}\right)=Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi},\end{aligned}\right.$$



nous pourrons alors, en divisant tout d'abord ces trois équations par les facteurs $\frac{P}{\psi}$, $\frac{Q}{\varpi}$, $\frac{R}{\varphi}$, en tirer les valeurs

$$P\frac{Q}{\varpi} - Q\frac{P}{\varpi} = \frac{R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}}{\frac{R}{\psi}}, \quad Q\frac{R}{\varphi} - R\frac{Q}{\varphi} = \frac{P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}}{\frac{P}{\varpi}}, \quad R\frac{P}{\psi} - P\frac{R}{\psi} = \frac{Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}}{\frac{Q}{\varphi}},$$

lesquelles, étant remises dans les deux équations obtenues tout à l'heure (1), les transformeront dans les suivantes

$$\frac{P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}}{\frac{P}{\varpi}}\frac{P^2}{\psi\varpi} = \frac{Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}}{\frac{Q}{\varphi}}\frac{Q^2}{\varpi\varphi} = \frac{R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}}{\frac{R}{\psi}}\frac{R^2}{\varphi\psi};$$

puis, en second lieu, multiplier de même haut et bas chacun des rapports égaux ainsi obtenus, respectivement par les trois autres facteurs $\frac{P}{\psi}$, $\frac{Q}{\varpi}$, $\frac{R}{\varphi}$, ce qui nous donnera de nouveau, à la place des mêmes équations, les deux autres

$$\frac{P.\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}}{\frac{P}{\psi}\frac{P}{\varpi}}\frac{P^2}{\psi\varpi} = \frac{Q.\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}}{\frac{Q}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}}\frac{Q^2}{\varpi\varphi} = \frac{R.\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}}{\frac{R}{\varphi}\frac{R}{\psi}}\frac{R^2}{\varphi\psi}$$

et enfin, cela fait, diviser simultanément ces deux dernières équations par le produit $\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}$, qui est par hypothèse différent de zéro (*), de manière à les ramener à la forme beaucoup plus

(*) C'est précisément à cause de ces multiplications ou divisions itératives par les unes ou les autres des six dérivées des fonctions P, Q, R, opérations nécessaires, comme on le voit, pour arriver à la forme d'équation (2), d'où ressortira toute notre recherche, que nous avons dû forcément, au risque d allonger sensiblement notre travail, examiner dans un chapitre à part, comme nous l'avons fait, les cas particuliers dans lesquels ces dérivées étaient supposées nulles.

avantageuse pour notre recherche

$$(2)\qquad \frac{P\dfrac{P^2}{\psi\varpi}}{\dfrac{P}{\psi}\dfrac{P}{\varpi}} = \frac{Q\dfrac{Q^2}{\varpi\varphi}}{\dfrac{Q}{\varpi}\dfrac{Q}{\varphi}} = \frac{R\dfrac{R^2}{\varphi\psi}}{\dfrac{R}{\varphi}\dfrac{R}{\psi}} = m,$$

en désignant par m la valeur commune de ces rapports. Or il est manifeste que cette valeur commune ne peut être qu'une simple constante, car, si l'on se reporte aux hypothèses (9), on voit que cette valeur commune ne devra contenir, ni φ en raison de sa première expression, ni ψ à cause de la seconde, ni ϖ eu égard à la troisième : d'où il suit que les deux équations (2), auxquelles nous étions parvenus tout à l'heure, équivaudront en fait aux trois équations beaucoup plus simples

$$P\frac{P^2}{\psi\varpi} = m\frac{P}{\psi}\frac{P}{\varpi},\qquad Q\frac{Q^2}{\varpi\varphi} = m\frac{Q}{\varpi}\frac{Q}{\varphi},\qquad R\frac{R^2}{\varphi\psi} = m\frac{R}{\varphi}\frac{R}{\psi},$$

qui, outre qu'elles ne renferment qu'une seule inconnue chacune, sont intégrables, pour ainsi dire immédiatement, par simple quadrature. Car la première, par exemple, pouvant s'écrire, en la divisant par le produit $P\frac{P}{\psi}$, qui n'est pas nul,

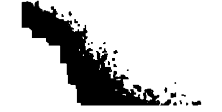
$$\frac{\dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{P}{\psi}\right)}{\dfrac{P}{\psi}} = m\,\frac{\dfrac{P}{\varpi}}{P},$$

donnera de suite en intégrant, P étant indépendant de φ,

$$\log\frac{P}{\psi} = m\log P + \log f(\psi),\qquad \text{ou}\qquad \frac{P}{\psi} = P^m f(\psi),$$

équation que nous récrirons, en multipliant par $(1-m)\,P^{-m}d\psi$,

$$(1-m)\,P^{-m}\frac{P}{\psi}\,d\psi = (1-m)\,f(\psi)\,d\psi,$$



et qui donnera dès lors, en intégrant de nouveau, et faisant $\int(1-m)f(\psi)\,d\psi = \Psi_1(\psi)$, Ψ_1 désignant ainsi que Π_2 deux fonctions arbitraires d'une seule variable

$$P^{1-m} = \Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi), \qquad \text{ou} \qquad P = \left[\Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi)\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

D'où il suit qu'en faisant définitivement $\frac{1}{1-m} = n$, nous aurons comme première expression des trois inconnues P, Q, R les trois suivantes

$$(3) \qquad P = \left[\Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi)\right]^n, \qquad Q = \left[\Pi_1(\varpi) + \Phi_2(\varphi)\right]^n, \qquad R = \left[\Phi_1(\varphi) + \Psi_2(\psi)\right]^n,$$

qui ne dépendent que de six fonctions d'une seule variable $\Phi_1, \Psi_1, \Pi_1, \Phi_2, \Psi_2, \Pi_2$.

2° « *Les six fonctions précitées d'une seule variable se réduisent à trois seulement, dont une de chaque variable,* $\Phi(\varphi)$, $\Psi(\psi)$, $\Pi(\varpi)$. » — Les trois expressions auxquelles nous venons de parvenir ont été obtenues en différentiant tout d'abord les équations proposées (13); elles représentent donc une solution plus large que celle qui convient à la question, et il ne faudra garder parmi les expressions de la forme précédente (3) que celles qui satisferont effectivement à ces équations (13) elles-mêmes, ou, ce qui est la même chose, aux deux équations (15) et (17), qui leur sont, comme on l'a vu, complètement équivalentes.

A cet effet lesdites expressions (3) donnant par la différentiation

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{P}{\psi} = n(\Psi_1 + \Pi_2)^{n-1}.\Psi_1', & \frac{Q}{\varpi} = n(\Pi_1 + \Phi_2)^{n-1}.\Pi_1', & \frac{R}{\varphi} = n(\Phi_1 + \Psi_2)^{n-1}.\Phi_1', \\ \frac{P}{\varpi} = n(\Psi_1 + \Pi_2)^{n-1}.\Pi_2', & \frac{Q}{\varphi} = n(\Pi_1 + \Phi_2)^{n-1}.\Phi_2', & \frac{R}{\psi} = n(\Phi_1 + \Psi_2)^{n-1}.\Psi_2', \end{array} \right.$$

nous trouverons en substituant, en premier lieu, dans l'équation (15),

$$(5) \qquad n^3(\Psi_1 + \Pi_2)^{n-1}(\Pi_1 + \Phi_2)^{n-1}(\Phi_1 + \Psi_2)^{n-1}(\Psi_1'\Pi_1'\Phi_1' + \Pi_2'\Phi_2'\Psi_2') = 0,$$



équation composée de quatre facteurs variables dont le dernier seul évidemment peut s'annuler, car dans chacun des trois premiers facteurs les deux termes qui le composent dépendent chacun d'une variable différente. Cette équation se réduisant donc à

$$(5^{bis}) \qquad \Phi'_1\Psi'_1\Pi'_1 + \Phi'_2\Psi'_2\Pi'_2 = 0,$$

et pouvant dès lors être écrite aussi bien sous l'une ou l'autre des trois formes

$$\frac{\Phi'_2}{\Phi'_1} = -\frac{\Psi'_1}{\Psi'_2}\frac{\Pi'_1}{\Pi'_2} = p, \qquad \frac{\Psi'_2}{\Psi'_1} = -\frac{\Pi'_1}{\Pi'_2}\frac{\Phi'_1}{\Phi'_2} = q, \qquad \frac{\Pi'_2}{\Pi'_1} = -\frac{\Phi'_1}{\Phi'_2}\frac{\Psi'_1}{\Psi'_2} = r,$$

montre que les valeurs respectives de ces trois suites de rapports p, q, r sont de simples constantes, car, dans la première suite, par exemple, le premier rapport ne dépend que de φ, et le second de ψ et ϖ seulement, et de même en permutant φ, ψ, ϖ, pour les deux autres suites.

De plus, ces trois séries d'égalités, étant multipliées membre à membre, donneront, en faisant abstraction des membres intermédiaires,

$$\frac{\Phi'_2\Psi'_2\Pi'_2}{\Phi'_1\Psi'_1\Pi'_1} = pqr, \qquad \text{ou simplement} \qquad -1 = pqr,$$

si l'on tient compte de nouveau de la précédente équation (5bis); c'est-à-dire, en résumé, que les six fonctions $\Phi_1, \Psi_1, \Pi_1, \Phi_2, \Psi_2, \Pi_2$ seront liées par les trois relations.

$$(6) \qquad \Phi'_2 = p\Phi'_1, \qquad \Psi'_2 = q\Psi'_1, \qquad \Pi'_2 = r\Pi'_1,$$

les trois constantes p, q, r étant elles-mêmes assujetties à vérifier la condition

$$(7) \qquad pqr + 1 = 0.$$

Par où l'on voit déjà que les expressions de P, Q, R ne dépendent en réalité que de trois fonctions d'une seule variable seule-



ment, au lieu de six que comportait la forme obtenue de prime abord (3).

Afin de n'avoir dans le résultat à intervenir que des constantes séparément arbitraires, nous introduirons, à la place des trois constantes p, q, r, supposées liées par la relation (7), trois autres constantes g, h, k, définies par les égalités

$$p = -\frac{k}{g}, \qquad q = -\frac{g}{h}, \qquad r = -\frac{h}{k},$$

que nous choisissons de telle sorte que cette même relation se trouve vérifiée, quelles que soient ces nouvelles constantes g, h, k; et alors les trois égalités précédentes (6) devenant avec ces nouvelles constantes

$$\Phi'_2 = -\frac{k}{g}\Phi'_1, \qquad \Psi'_2 = -\frac{g}{h}\Psi'_1, \qquad \Pi'_2 = -\frac{h}{k}\Pi'_1,$$

donneront en intégrant, et désignant encore par kb, gc, ha, trois autres constantes arbitraires

$$\Phi_2 = -\frac{k}{g}\Phi_1 + kb, \qquad \Psi_2 = -\frac{g}{h}\Psi_1 + gc, \qquad \Pi_2 = -\frac{h}{k}\Pi_1 + ha,$$

valeurs qui, étant reportées dans les expressions ci-dessus (3), transformeront celles-ci dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
P &= \left(\Psi_1 - \frac{h}{k}\Pi_1 + ha\right)^n = h^n\left(\frac{1}{h}\Psi_1 - \frac{1}{k}\Pi_1 + a\right)^n,\\
Q &= \left(\Pi_1 - \frac{k}{g}\Phi_1 + kb\right)^n = k^n\left(\frac{1}{k}\Pi_1 - \frac{1}{g}\Phi_1 + b\right)^n,\\
R &= \left(\Phi_1 - \frac{g}{h}\Psi_1 + gc\right)^n = g^n\left(\frac{1}{g}\Phi_1 - \frac{1}{h}\Psi_1 + c\right)^n,
\end{aligned}\right.$$

ou plus simplement en écrivant respectivement α, β, γ, à la place de h^n, k^n, g^n, et Φ, Ψ, Π, au lieu de $\frac{1}{g}\Phi_1$, $\frac{1}{h}\Psi_1$, et $\frac{1}{k}\Pi_1$:

$$(8) \qquad P = \alpha(\Psi - \Pi + a)^n, \qquad Q = \beta(\Pi - \Phi + b)^n, \qquad R = \gamma(\Phi - \Psi + c)^n.$$



Ce premier résultat obtenu, il faudra substituer de même ces valeurs, ainsi que celles qui en résulteraient pour les six dérivées $\frac{P}{\psi}, \frac{P}{\varpi}, \frac{Q}{\varphi}, \ldots \frac{R}{\psi}$, dans l'autre équation de remplacement (17). A cette fin, convenant de désigner par A, B, C, en vue de faciliter les écritures, les trois quantités

(9) $$A = \Psi - \Pi + a, \qquad B = \Pi - \Phi + b, \qquad C = \Phi - \Psi + c,$$

lesquelles donneront, comme on le voit, l'égalité

(10) $$A + B + C = a + b + c,$$

les expressions ci-dessus (8), qui deviennent alors

(11) $$P = \alpha A^n, \qquad Q = 6 B^n, \qquad R = \gamma C^n,$$

fourniront maintenant, au lieu des valeurs (4), celles-ci

(12) $$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{P}{\psi} = \ n\alpha A^{n-1}.\Psi', & \frac{Q}{\varpi} = \ n6 B^{n-1}\,\Pi', & \frac{R}{\varphi} = \ n\gamma C^{n-1}.\Phi', \\ \frac{P}{\varpi} = - n\alpha A^{n-1}.\Pi', & \frac{Q}{\varphi} = - n6 B^{n-1}.\Phi', & \frac{R}{\psi} = - n\gamma C^{n-1}.\Psi', \end{array} \right.$$

lesquelles, étant remises dans la susdite équation (17), donneront de prime abord pour résultat

$$\begin{aligned} &- \alpha A^n.\, n6 B^{n-1}.\, n\gamma C^{n-1}.(\Phi'\Psi' + \Pi'\Phi' + \Psi'\Pi') \\ &- 6 B^n.\, n\gamma C^{n-1}.\, n\alpha A^{n-1}.(\Psi'\Pi' + \Phi'\Psi' + \Pi'\Phi') \\ &- \gamma C^n.\, n\alpha A^{n-1}.\, n6 B^{n-1}.(\Pi'\Phi' + \Psi'\Pi' + \Phi'\Psi') = 0, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$n^2\alpha 6\gamma A^{n-1}B^{n-1}C^{n-1}(A + B + C)(\Psi'\Pi' + \Pi'\Phi' + \Phi'\Psi') = 0.$$

Or, aucun des facteurs A, B, C ne pouvant être constamment nul, par la même raison que nous avons dite tout à l'heure, à l'occasion de l'équation (5), celle que nous venons d'obtenir en



dernier lieu équivaudra simplement, en tenant compte de la relation (10), à celle-ci

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{\Phi'} + \frac{1}{\Psi'} + \frac{1}{\Pi'}\right)\Phi'\Psi'\Pi' = 0,$$

dont le premier des facteurs variables ne peut de nouveau être supposé constamment nul, toujours par la même raison, non plus que les trois suivants parce que les six dérivées (12) sont toutes expressément supposées différentes de zéro ; et par conséquent cette dernière équation exigera, pour être vérifiée, que les constantes a, b, c, satisfassent à la relation

$$a + b + c = 0.$$

Pour n'avoir encore dans notre résultat, nonobstant cette dernière condition, que des constantes séparément arbitraires, nous introduirons de nouveau dans nos expressions (8), comme constantes arbitraires, à la place de celles que nous nommions tout à l'heure a, b, c, trois différences telles que $b - c$, $c - a$, $a - b$, dont la somme est nulle, ce qui donnera tout d'abord pour les quantités A, B, C, à la place des expressions (9), les suivantes

$$\begin{cases} A = \Psi - \Pi + b - c = \Psi + b - (\Pi + c), \\ B = \Pi - \Phi + c - a = \Pi + c - (\Phi + a), \\ C = \Phi - \Psi + a - b = \Phi + a - (\Psi + b), \end{cases}$$

ou tout aussi bien, en convenant d'écrire simplement désormais Φ, Ψ, Π, à la place de $\Phi + a$, $\Psi + b$, $\Pi + c$, celles-ci

$$(13) \qquad A = \Psi - \Pi, \qquad B = \Pi - \Phi, \qquad C = \Phi - \Psi,$$

lesquelles vérifieront maintenant la relation

$$(14) \qquad A + B + C = 0;$$

et dès lors les formules (11) donneront pour les inconnues

P, Q, R, à la place des valeurs (8) obtenues tout à l'heure, ces valeurs plus simples et aussi symétriques

$$(15)\qquad P = \alpha(\Psi - \Pi)^n, \qquad Q = \beta(\Pi - \Phi)^n, \qquad R = \gamma(\Phi - \Psi)^n,$$

les expressions des six dérivées (12) restant d'ailleurs les mêmes, mais avec les nouvelles valeurs (13) des quantités A, B, C.

Détermination de ces trois fonctions inconnues par le moyen d'une même équation différentielle ordinaire du cinquième ordre. — Telle est donc la forme nécessaire que la considération du seul groupe des trois équations du premier ordre (13) du Chapitre III, joint aux hypothèses (8), impose à nos trois inconnues. Voyons maintenant quelles restrictions, ou délimitation nouvelle, apporte à cette forme le second groupe des trois équations du second ordre (19) du même Chapitre.

3° « *Les trois inconnues* P, Q, R *sont égales, chacune à un facteur constant près, aux différences deux à deux de ces trois fonctions* Φ, Ψ, Π. » — Écrivant d'abord comme il suit la première de ces trois équations (19)

$$2Q^2R\left[P\frac{P''}{\psi^2}-\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2\right]+2QR^2\left[P\frac{P''}{\varpi^2}-\left(\frac{P'}{\varpi}\right)^2\right]+2P^3\frac{Q'}{\varphi}\frac{R'}{\varphi}=PG,$$

puis remarquant, comme dans le Chapitre précédent [formules (134) et (135)], que l'on a pour une variable indépendante θ quelconque,

$$\frac{(lP)''}{\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{lP'}{\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\frac{P'}{\theta}\right)=\frac{P\frac{P''}{\theta^2}-\left(\frac{P'}{\theta}\right)^2}{P^2},$$

nous la mettrons, en la divisant alors par le produit $2P^2QR$, sous la forme

$$(15^{\text{bis}})\qquad Q\frac{(lP)''}{\psi^2}+R\frac{(lP)''}{\varpi^2}+P\frac{lQ'}{\varphi}\frac{lR'}{\varphi}=\frac{G}{2PQR}.$$

Or les expressions (15) ou (11) de P, Q, R, dans lesquelles



A, B, C ont les valeurs (13), ou plutôt celles-ci qui s'en déduisent,

$$lP = l\alpha + nlA, \qquad lQ = l\beta + nlB, \qquad lR = l\gamma + nlC,$$

donnant par deux différentiations successives

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{lP}{\psi} = n\dfrac{\Psi'}{A}, & \dfrac{lQ}{\varpi} = n\dfrac{\Pi'}{B}, & \dfrac{lR}{\varphi} = n\dfrac{\Phi'}{C}, \\ \dfrac{lP}{\varpi} = -n\dfrac{\Pi'}{A}, & \dfrac{lQ}{\varphi} = -n\dfrac{\Phi'}{B}, & \dfrac{lR}{\psi} = -n\dfrac{\Psi'}{C}, \\ \dfrac{(lP)^2}{\psi^2} = n\left(\dfrac{\Psi''}{A} - \dfrac{\Psi'^2}{A^2}\right), & \dfrac{(lP)^2}{\varpi^2} = -n\left(\dfrac{\Pi''}{A} + \dfrac{\Pi'^2}{A^2}\right), & \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

la substitution de ces dérivées dans l'équation précédente (13bis), fournira celle-ci

$$Q.n\left(\frac{\Psi''}{A} - \frac{\Psi'^2}{A^2}\right) - R.n\left(\frac{\Pi''}{A} + \frac{\Pi'^2}{A^2}\right) - P.n^2\frac{\Phi'^2}{BC} = \frac{G}{2PQR},$$

ou, ce qui est la même chose, en multipliant par $\frac{A}{n}$, la première des trois équations suivantes

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} Q\Psi'' - R\Pi'' = \dfrac{AG}{2nPQR} + n\dfrac{A}{BC}P\Phi'^2 + \dfrac{Q\Psi'^2 + R\Pi'^2}{A}, \\ R\Pi'' - P\Phi'' = \dfrac{BG}{2nPQR} + n\dfrac{B}{CA}Q\Psi'^2 + \dfrac{R\Pi'^2 + P\Phi'^2}{B}, \\ P\Phi'' - Q\Psi'' = \dfrac{CG}{2nPQR} + n\dfrac{C}{AB}R\Pi'^2 + \dfrac{P\Phi'^2 + Q\Psi'^2}{C}, \end{array}\right.$$

les deux autres devant résulter manifestement d'un calcul analogue opéré sur les deux autres équations (19) précitées, puisque toutes les équations dont nous avons fait usage pour ce calcul procèdent d'une loi de permutation évidente.

On pourra donc substituer dans le calcul actuel, à la pre-



mière de ces équations (19), soit la première des trois équations que nous venons d'écrire, soit une combinaison quelconque de ces mêmes équations, par exemple celle obtenue en les ajoutant membre à membre, équation dont la considération s'impose de préférence à tout autre, parce que, les premiers membres se détruisant, elle ne sera plus alors que du premier ordre seulement en Φ, Ψ, Π, et qui sera la suivante

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = (A + B + C)\frac{G}{2nPQR} + (nA + B + C)\frac{P\Phi'^2}{BC} + (nB + C + A)\frac{Q\Psi'^2}{CA} \\ + (nC + A + B)\frac{R\Pi'^2}{AB}, \end{aligned} \right.$$

laquelle, en tenant compte de la relation identique (14), puis ramenant tous les termes au même dénominateur, se réduira finalement à la suivante :

$$(18)\qquad \frac{n-1}{ABC}(A^2.P\Phi'^2 + B^2.Q\Psi'^2 + C^2.R\Pi'^2) = 0.$$

Or, comme nous l'avons fait observer maintes fois déjà dans le Chapitre précédent, il résulte des définitions (7) des quantités P, Q, R qu'elles sont toutes trois essentiellement positives, et ne peuvent être supposées nulles que pour des points exceptionnels. L'équation qui précède ne saurait donc être vérifiée qu'à la condition que l'on ait $n - 1 = 0$, ou $n = 1$, ce qui réduit dès lors les valeurs (15) de nos inconnues P, Q, R à la forme linéaire très simple, découverte par Lamé (*) :

$$(19)\qquad P = \alpha(\Psi - \Pi), \qquad Q = \beta(\Pi - \Phi), \qquad R = \gamma(\Phi - \Psi).$$

(*) Ces expressions sont celles qui résultent immédiatement du rapprochement des formules (4) du § LIII (p. 95), et (14) du § LVI (p. 99) des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*. Lamé, à la vérité, y fait expressément $-\alpha = \beta = -\gamma$; mais aucune considération, comme nous le verrons par la suite, n'impose cette restriction, qui outre qu'elle est arbitraire, à le grave défaut de rompre la symétrie essentielle entre ces trois fonctions P, Q, R, laquelle est une condition indispensable au succès des calculs qui nous restent à accomplir, si nous voulons obtenir une solution complètement rigoureuse du problème posé dans ce Mémoire.

Mais si l'illustre Auteur a su deviner en quelque sorte cette solution remarquable imposée par la forme des équations (13) et (19) du Chapitre III, il la pose d'emblée, en se contentant, pour toute justification, de remarquer en dix lignes (*) qu'elle satisfait bien aux trois équations (13), et par conséquent rien dans sa théorie ne permet de penser que cette solution soit la seule admissible, ou seulement la plus générale possible, proposition qui résulte au contraire avec une complète rigueur des calculs qui nous ont conduits tout à l'heure à ces mêmes expressions (19).

Nous aurons plus d'une fois encore, dans le cours de cette recherche, l'occasion de renouveler, avec autant de raison, la même observation.

4° « *Ces fonctions inconnues Φ, Ψ, Π satisfont toutes les trois à une même équation différentielle ordinaire du cinquième ordre.* » — Les trois équations du second ordre (19) du Chapitre III, dont nous n'avons encore utilisé qu'une seule, lorsqu'on y aura remis à la place de P, Q, R leurs valeurs précédentes (19) en Φ, Ψ, Π, appartiendront alors à une catégorie que l'on rencontre assez rarement en Analyse, et qui est en quelque sorte intermédiaire entre les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles. En effet, si, d'une part, elles ne renferment pour inconnues, de même que les premières, que des fonctions d'une seule variable, chacune d'elles contient néanmoins, comme les secondes, des fonctions inconnues de chacune des trois variables indépendantes, ainsi que leurs dérivées relatives à ces trois variables différentes, puisque les trois inconnues y entrent

(*) A savoir le dernier alinéa de la page 99 (§ LVI), car les équations (14) qu'il y écrit présentent manifestement la même forme que nos équations ci-dessus (19), à la seule condition d'y particulariser les constantes α, β, γ, ainsi que nous venons de le dire dans la note précédente.

Quant à l'alinéa suivant de douze lignes (page 100), il fait bien connaître par quelle série d'inductions rationnelles l'on peut être conduit à constater qu'une pareille forme d'expressions vérifie par le fait les équations en question, mais il n'établit évidemment en quoi que ce soit la *nécessité* de cette même forme, qui permet seule de dire qu'elle est la plus générale possible.

simultanément : d'où il suit que ces équations ne peuvent être intégrées, *en l'état*, ni comme un système d'équations différentielles ordinaires, toutes les dérivées des inconnues n'étant pas relatives à la même variable indépendante, ni comme un système d'équations aux dérivées partielles, puisque chaque inconnue ne dépend que d'une seule variable.

Toutefois, il est facile de voir qu'elles pourront être ramenées sans peine à de simples équations différentielles ordinaires, à l'aide de la méthode d'élimination des constantes arbitraires qui conduit, en partant d'équations en termes finis, à la formation de semblables équations. Car, pàr rapport à l'inconnue Φ, par exemple, les deux autres fonctions Ψ et Π pouvant être considérées, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, comme autant de constantes distinctes, il est clair qu'il suffira de se procurer, par la différentiation en φ seule, un nombre total de *sept* équations distinctes, pour que l'on puisse ensuite éliminer entre elles les *six* quantités Ψ, Ψ', Ψ'', Π, Π', Π'', et former par là une équation différentielle ordinaire à laquelle devra satisfaire isolément l'inconnue Φ.

Si donc nous n'avions pas encore fait usage de ce groupe d'équations (19) du Chapitre III, comme on obtiendrait précisément ce nombre de sept équations en joignant à ces trois équations elles-mêmes celles qui en proviendraient en différentiant par rapport à φ, une fois chacune des deux dernières équations, et deux fois la première (laquelle ne contenant pas, comme les deux autres, la dérivée Φ'', devra dès lors être différentiée une fois de plus que celles-là), on voit de cette façon que l'équation différentielle cherchée serait ainsi du troisième ordre seulement. Mais il n'en peut plus être ainsi actuellement, parce qu'ayant tout à l'heure substitué à l'une quelconque de ces équations (19) du Chapitre III, ou (16) de celui-ci, la combinaison (17) ou (18), à laquelle nous avons déjà satisfait en prenant $n = 1$ dans les expressions (15), nous sommes assurés par là qu'avec les expressions (19) ainsi obtenues, ces trois équations (19) du Chapitre III se réduisent maintenant à *deux* distinctes seulement.



Il faudra donc à présent, pour obtenir le même nombre de sept équations, différentier trois fois la première de ces équations (19) et deux fois l'une des deux suivantes, puis joindre les équations ainsi formées à deux quelconques de ces équations (19) elles-mêmes : d'où l'on voit ainsi que l'équation différentielle demandée sera dès lors du *cinquième* ordre en Φ. Et cela posé, il résulte évidemment de la symétrie complète que présentent à la fois, ce groupe d'équations d'une part, et les expressions (19) ci-dessus de P, Q, R d'autre part, que les deux équations semblables qui déterminent Ψ et Π apppartiendront exactement au même type, en sorte que l'intégration de ces trois équations différentielles n'exigera qu'un seul et même calcul.

Pour effectuer cette élimination, différentions donc d'abord trois fois de suite par rapport à φ, la première équation du groupe (19) du Chapitre III.

A cette fin, récrivant d'abord cette équation, en y remplaçant G par sa valeur immédiatement précédente (18), puis réduisant, ainsi qu'il suit

$$2PQR\left(Q\frac{P^2}{\psi^2}+R\frac{P^2}{\varpi^2}\right)=Q^2\left[P\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}+2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right]$$
$$+R^2\left[P\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}+2Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right]-P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},$$

Puis y remettant à la place des dérivées de P, Q, R leurs valeurs déduites des expressions (19), savoir

$$(20)\quad\left\{\begin{array}{lll}\frac{P}{\psi}=\alpha\Psi', & \frac{Q}{\varpi}=\beta\Pi', & \frac{R}{\varphi}=\gamma\Phi',\\ \frac{P}{\varpi}=-\alpha\Pi', & \frac{Q}{\varphi}=-\beta\Phi', & \frac{R}{\psi}=-\gamma\Psi',\\ \frac{P^2}{\psi^2}=\alpha\Psi'', & \frac{P^2}{\varpi^2}=-\alpha\Pi'', & \\ \dots & \dots & \end{array}\right.$$

nous les transformerons dans celle-ci

$$2P\,(RQ^2.\alpha\Psi'' - QR^2.\alpha\Pi'') = Q^2\,(-P.\alpha\gamma\Psi'^2 + 2R.\alpha^2\Psi'^2) + R^2\,(-P.\alpha\beta\Pi'^2 + 2Q.\alpha^2\Pi'^2) + P^3.\beta\gamma\Phi'^2,$$

ou, en divisant par α et ordonnant le second membre par rapport aux dérivées Φ', Ψ', Π',

$$(21)\quad \left\{ 2P\,(RQ^2\,\Psi'' - QR^2.\Pi'') = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\,P^3.\Phi'^2 + (2\alpha R - \gamma P)\,Q^2.\Psi'^2 + (2\alpha Q - \beta P)\,R^2.\Pi'^2. \right.$$

Cela fait, une première différentiation en φ nous donnera, en nous rappelant que, par hypothèse, P est indépendant de cette variable,

$$2P\left[\left(R.2Q\frac{Q}{\varphi} + Q^2\frac{R}{\varphi}\right)\Psi'' - \left(Q.2R\frac{R}{\varphi} + R^2\frac{Q}{\varphi}\right)\Pi''\right] = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\,P^3.2\Phi'\Phi'' + \left[(2\alpha R - \gamma P)\,2Q\frac{Q}{\varphi} + Q^2.2\alpha\frac{R}{\varphi}\right]\Psi'^2 + \left[(2\alpha Q - \beta P)\,2R\frac{R}{\varphi} + R^2.2\alpha\frac{Q}{\varphi}\right]\Pi'^2,$$

ou, en remplaçant de nouveau les dérivées de P, Q, R par leurs valeurs (20),

$$2P\left[(-R.2Q.\beta\Phi' + Q^2.\gamma\Phi')\,\Psi'' - (Q.2R.\gamma\Phi' - R^2.\beta\Phi')\,\Pi''\right] = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\,P^3.2\Phi'\Phi'' + \left[(2\alpha R - \gamma P)(-2Q.\beta\Phi') + Q^2.2\alpha\gamma\Phi'\right]\Psi'^2 + \left[(2\alpha Q - \beta P)\,2R.\gamma\Phi' - R^2.2\alpha\beta\Phi'\right]\Pi'^2,$$

ou encore, en divisant par $2\Phi'$, et ordonnant par rapport à P, Q, R les deux parenthèses du second membre :

$$P\left[Q\,(\gamma Q - 2\beta R)\,\Psi'' + R\,(\beta R - 2\gamma Q)\,\Pi''\right] = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\,P^3.\Phi'' + Q\,(\beta\gamma P + \alpha\gamma Q - 2\alpha\beta R)\,\Psi'^2 - R\,(\beta\gamma P + \alpha\beta R - 2\alpha\gamma Q)\,\Pi'^2.$$

Or, les expressions (19) donnant évidemment les relations

$$\beta\gamma P + \gamma\alpha Q + \alpha\beta R = \alpha\beta\gamma\,(\Psi - \Pi + \Pi - \Phi + \Phi - \Psi) = 0,$$

d'où l'on conclut séparément

$$\beta\gamma P + \alpha\gamma Q = -\alpha\beta R, \qquad \beta\gamma P + \alpha\beta R = -\alpha\gamma Q,$$

l'équation que nous venons d'obtenir par une première différentiation pourra dès lors être mise sous la forme plus simple

$$(21^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{aligned} P\left[Q\,(\gamma Q - 2\beta R)\,\Psi'' + R\,(\beta R - 2\gamma Q)\,\Pi''\right] = \frac{\beta\gamma}{\alpha} P^3.\Phi'' \\ - 3\alpha QR\,(\beta\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2). \end{aligned} \right.$$

Différentiant alors de nouveau celle-ci, nous obtiendrons de la même façon

$$\begin{aligned} P\Bigg[&\left\{Q\left(\gamma\frac{Q}{\varphi} - 2\beta\frac{R}{\varphi}\right) + (\gamma Q - 2\beta R)\frac{Q}{\varphi}\right\}\Psi'' \\ &+ \left\{R\left(\beta\frac{R}{\varphi} - 2\gamma\frac{Q}{\varphi}\right) + (\beta R - 2\gamma Q)\frac{R}{\varphi}\right\}\Pi''\Bigg] \\ &= \frac{\beta\gamma}{\alpha} P^3.\Phi''' - 3\alpha\left(Q\frac{R}{\varphi} + R\frac{Q}{\varphi}\right)(\beta\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2). \end{aligned}$$

et, en substituant encore les valeurs (20),

$$\begin{aligned} P\big[&\{Q(-\gamma.\beta\Phi' - 2\beta.\gamma\Phi') + (\gamma Q - 2\beta R)(-\beta\Phi')\}\Psi'' \\ &+ \{R(\beta.\gamma\Phi' + 2\gamma.\beta\Phi') + (\beta R - 2\gamma Q)\gamma\Phi'\}\Pi''\big] \\ &= \frac{\beta\gamma}{\alpha} P^3.\Phi''' - 3\alpha\,(Q.\gamma\Phi' - R.\beta\Phi')(\beta\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2), \end{aligned}$$

ou, en divisant encore par Φ',

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} 2P\left[\beta\,(\beta R - 2\gamma Q)\,\Psi'' - \gamma\,(\gamma Q - 2\beta R)\,\Pi''\right] \\ = \frac{\beta\gamma}{\alpha} P^3.\frac{\Phi'''}{\Phi'} - 3\alpha\,(\gamma Q - \beta R)(\beta\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2). \end{aligned} \right.$$

Une troisième différentiation nous donnera enfin

$$2P\left[\beta\left(\beta\frac{R}{\varphi}-2\gamma\frac{Q}{\varphi}\right)\Psi''-\gamma\left(\gamma\frac{Q}{\varphi}-2\beta\frac{R}{\varphi}\right)\Pi''\right]$$
$$=\frac{\beta\gamma}{\alpha}P^3.\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)-3\alpha\left(\gamma\frac{Q}{\varphi}-\beta\frac{R}{\varphi}\right)(\beta\Psi'^2-\gamma\Pi'$$

ou, toujours par l'application des mêmes procédés,

$$2P\left[\beta(\beta.\gamma\Phi'+2\gamma.\beta\Phi')\Psi''-\gamma(-\gamma.\beta\Phi'-2\beta.\gamma\Phi')\Pi''\right]$$
$$=\frac{\beta\gamma}{\alpha}P^3.\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)-3\alpha(-\gamma.\beta\Phi'-\beta.\gamma\Phi')(\beta\Psi'^2-\gamma\Pi'^2),$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant, et divisant par $\beta\gamma\Phi'$,

$$(22^{\text{bis}})\qquad 6P(\beta\Psi''+\gamma\Pi'')=\frac{P^3}{\alpha}\cdot\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)+6\alpha(\beta\Psi'^2-\gamma\Pi'^2).$$

Pour accomplir littéralement le programme que nous nous sommes tracé pour ce calcul, il faudrait maintenant former deux équations analogues, en différentiant deux fois, également en φ, la seconde ou la troisième équation (19) du Chapitre III, joindre les deux équations obtenues de cette façon, ainsi que les précédentes (21bis), (22) et (22bis), à deux de ces mêmes équations (19) elles-mêmes, puis, après avoir remplacé de nouveau dans toutes P, Q, R et leurs dérivées par leurs expressions (19) et (20), éliminer alors entre ces sept équations les six quantités Ψ, Ψ', Ψ'', Π, Π', Π''. Mais la forme particulière de l'équation (22bis) que nous venons d'obtenir nous dispensera heureusement de cette seconde partie de notre programme; car si nous récrivons cette même équation ainsi qu'il suit, en ne gardant au second membre que le premier terme, et divisant ensuite par son coefficient $\frac{P^3}{\alpha}$,

$$\frac{6\alpha}{P^3}\left[P(\beta\Psi''+\gamma\Pi'')-\alpha(\beta\Psi'^2-\gamma\Pi'^2)\right]=\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right),$$

le second membre, qui ne dépendra alors que de φ seule, ne

pourra être constamment égal au premier, qui ne dépend lui que de ψ et de ϖ, qu'à la condition de conserver une valeur constante, en sorte que le résultat de l'élimination poursuivie sera certainement une équation de la forme

$$\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right) = \text{const.},$$

et les équations différentielles demandées seront dès lors les trois suivantes

$$(23)\qquad \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)\right] = 0,\qquad \frac{d}{d\psi}\left[\frac{1}{\Psi'}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Psi'''}{\Psi'}\right)\right] = 0,\qquad \frac{d}{d\varpi}\left[\frac{1}{\Pi'}\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi'}\right)\right] = 0,$$

équations que n'indiquent ni Lamé, ni Betti, et dont l'intégration générale, malgré leur ordre élevé et leur apparente complication, sera, au contraire, comme nous le verrons tout à l'heure, des plus simples et des plus faciles.

Comparaison de la méthode de détermination qui précède avec celle indiquée par Lamé pour le même objet. — Avant de procéder à cette intégration, et, au moyen de ses résultats, à la formation de la solution cherchée, on nous permettra bien, en vue de justifier l'opportunité et l'intérêt des calculs qui précèdent, d'indiquer sommairement quelles considérations et quelle méthode propose Lamé, dans les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, pour parvenir à la détermination des inconnues Φ, Ψ, Π.

Au lieu de ramener la question, ainsi que nous venons de le faire, à l'intégration d'une seule équation différentielle, Lamé, après avoir mis chacune des trois équations (19) du Chapitre III sous la forme analogue à (21), allègue comme évident que « la vérification de semblables équations *ne saurait être obtenue qu'en* exprimant » les carrés des dérivées (*) Φ'^2, Ψ'^2, Π'^2 par des développements tels que

$$(24)\qquad \Phi'^2 = \sum_i \mathcal{A}_i \Phi^i,\qquad \Psi'^2 = \sum_i \mathcal{B}_i \Psi^i,\qquad \Pi'^2 = \sum_i \mathcal{C}_i \Pi^i,$$

(*) Pour faciliter au Lecteur l'intelligence du texte de Lamé, et lui rendre aussi aisée que

lesquels donneront à leur tour, en différentiant et divisant respectivement par $2\Phi'$, $2\Psi'$, $2\Pi'$, pour les dérivées secondes, les développements corrélatifs

$$(25)\qquad \Phi''=\sum_i \frac{i}{2}\mathcal{A}_i\Phi^{i-1},\qquad \Psi''=\sum_i \frac{i}{2}\mathcal{B}_i\Psi^{i-1},\qquad \Pi''=\sum_i \frac{i}{2}\mathcal{C}_i\Pi^{i-1},$$

et qui, « d'après la symétrie complète des équations qu'ils doivent vérifier, doivent être composés d'un même nombre *fini* (?) de termes (*) ». Et alors, dit Lamé, « la substitution de ces valeurs dans les trois équations développées les réduira à ne contenir que des puissances entières des (Φ, Ψ, Π), et l'indépendance relative de ces trois fonctions de variables différentes exigera l'annulation de tous les termes à l'aide des trois séries de coefficients indéterminés ($\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$) (**) ».

Il est à peine besoin de faire observer, sans examiner pour l'instant les conditions pratiques de l'application de cette méthode

---

possible la comparaison que nous avons en vue dans cet article, nous croyons devoir substituer, *même dans les citations textuelles* empruntées au discours de Lamé, les notations et le numérotage d'équations du présent Mémoire à ceux de l'illustre Auteur, ce qui ne modifiera évidemment en quoi que ce soit le sens ni la portée des textes en question.

(*) LEÇONS SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES, § LVIII, (page 103, second alinéa).

(**) IBID., § LVII (page 102, *in medio*). L'équation (21) de Lamé, qui précède immédiatement ce texte, n'est autre en effet que notre équation (21) dans laquelle on aurait permuté deux fois de suite les trois groupes (α, 6, γ), (Φ, Ψ, Π), (P, Q, R), puis fait passer tous les termes dans le premier membre, et enfin divisé par le produit $4PQR^2$. On retrouvera en effet *littéralement* cette équation (21) de Lamé, si l'on traduit notre équation (21), préparée comme nous venons de le dire, dans les notations de l'Auteur, à l'aide de la *clef* suivante, qui pourra servir de même pour toutes les équations empruntées à Lamé et rapportées par nous dans le cours de cette théorie, savoir

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi=\rho, & \psi=\rho_1, & \varpi=\rho_2, \\ \Delta_1\varphi=h, & \Delta_1\psi=h_1, & \Delta_1\varpi=h_2, \\ \Phi=c^2A^2, & \Psi=c^2A_1^2, & \Pi=c^2A_2^2, \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lll} H=H^2, & K=H_1^2, & J=H_2^2, \\ P=lQ^2, & Q=lQ_1^2, & R=lQ_2^2, \end{array}$$

à laquelle il faut joindre la restriction $-\alpha=6=-\gamma=\frac{l}{c^2}$ déjà signalée dans une note antérieure (page 294). On s'assurera, aisément par exemple, en appliquant la même transformation à nos trois équations (19), qu'elles reproduiront bien de même *littéralement* les trois équations (14) de Lamé (page 99), déjà citées un peu plus haut dans la note de la page 295 ci-dessus.



dans l'hypothèse que nous allons dire (*), qu'elle ne serait admissible, même *en théorie* pure, pour le Cas général, que si le nombre commun *n* des termes de chaque développement (24) était *a priori*, non seulement *fini*, mais *connu*, condition essentielle que, pas plus avant qu'après, Lamé n'établit d'une façon certaine, quant au Cas le plus général du problème : attendu qu'en l'absence de cette double condition, l'on ne pourra faire autrement que de supposer illimité chacun des développements (24), auquel cas, après substitution des valeurs (19) d'abord, puis (24), et (25), dans les équations précitées (21), les premiers membres de chacune d'elles devant alors être composés eux-mêmes d'une suite illimitée de termes en Φ, Ψ, Π, l'on se trouverait ainsi condamné par cette voie, à former d'abord, puis à poser et à résoudre, un nombre indéfini d'équations successives.

Aussi, après avoir indiqué *en théorie* cette méthode pour la détermination des inconnues Φ, Ψ, Π, Lamé se garde-t-il bien de l'adopter en fait, et se hâte-t-il, en attaquant le problème, « au lieu d'entreprendre une opération aussi prodigieusement longue », de lui substituer une série de déductions fort ingénieuses, mais de valeur purement conjecturale, dont il trace ainsi le programme : « D'après certaines propriétés des fonctions (Φ, Ψ, Π et leurs dérivées), assigner d'avance les valeurs *probables* des coefficients ($\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$) ; composer, en quelque sorte de toutes

(*) Si l'on admet comme démontrée, par le procédé que nous indiquons ou bien par tout autre, l'hypothèse assurément fort restreinte de $n = 3$, qui correspond, ainsi que nous allons le voir, à la réalité pour le Cas le plus général, et qui n'introduira dès lors que neuf coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, à déterminer, comme rien n'indique *à priori* que les coefficients α, 6, γ des expressions (19) devront rester arbitraires, l'on voit que, suivant cette méthode, l'on devra calculer d'abord, puis égaler à zéro, au moins douze coefficients des différents termes en Φ, Ψ, Π, formant le développement des équations précitées (21) après la substitution des expressions (19) d'abord, puis (24) et (25) ensuite. Ainsi, en n'envisageant que les conditions dans lesquelles *seules* devient admissible et réalisable la méthode indiquée par Lamé, on sera donc amené par cette voie à résoudre un système de *douze* équations, qui seront linéaires par rapport aux neuf coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, mais du *cinquième* degré par rapport aux trois autres α, 6, γ. C'est un calcul équivalent au fond à celui-là que nous allons effectuer dans les pages qui vont suivre, mais en le présentant sous une forme qui permette mieux de le développer jusqu'au bout, et telle que les résultats définitifs en soient beaucoup plus clairs et plus faciles à interpréter.

pièces, un groupe (24) qui reproduise ces propriétés, et constater ensuite que le groupe ainsi obtenu vérifie les équations [du type (21)] ». Si nous ajoutons que Lamé fonde ce nouvel ordre de considérations sur la base, singulièrement étroite, consistant à démontrer, comme il le fait un peu plus loin, que « le nombre commun des termes des développements (24) ne saurait être inférieur à trois, et qu'il *peut* n'être que trois », et qui dès lors n'établit en aucune façon la *nécessité* de la forme de solution correspondant à cette hypothèse, permise mais gratuite, l'on jugera sans doute avec nous que cette solution présentée par lui dans les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, quelque belle et importante qu'elle soit, étant rencontrée et justifiée par les procédés que nous venons de dire, n'offre en l'état que la valeur d'une solution *très particulière*. Et dès lors, la question de la recherche de la solution la plus générale du problème restant entière comme devant, peut-être sera-t-on plus disposé à nous pardonner, en considération de leur rigueur et de la netteté de leurs résultats, la prolixité et la complication des calculs que nous allons offrir dans ce Chapitre, pour suppléer à l'insuffisance trop manifeste de ceux présentés par Lamé dans l'ouvrage ci-dessus désigné (*).

INTÉGRATION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU CINQUIÈME ORDRE PROPOSÉE. — On pourrait avoir la pensée, ayant à intégrer d'une façon générale l'équation différentielle du cinquième ordre à laquelle nous sommes parvenus un peu plus haut, de développer cette équation, et de l'ordonner, conformément à l'usage, par rapport aux divers ordres des dérivées, et pour les dérivées

(*) Nous ne savons en effet dans quel autre ouvrage se trouve la démonstration postérieure (dont nous n'avons nulle connaissance) à laquelle Lamé fait allusion, en disant, à deux reprises différentes et dans les mêmes termes, successivement à propos de celles de ses formules qui correspondent à nos équations (19) d'abord, et (28) ensuite : « J'ai démontré, *depuis*, que les valeurs [(19) ci-dessus] des (P, Q, R), exprimées par les [Φ, Ψ, Π, ci-après (28)], sont les intégrales *les plus générales* du groupe des trois équations aux différences partielles [(13) ou (19) de notre Chap. III], qu'elles vérifient ». (COORDONN. CURV., pp. 100, dernier alinéa, et 107, premier alinéa.)



de chaque ordre, suivant leurs puissances. Écrite de cette façon, avec les notations classiques, la première de ces trois équations (23) serait alors

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{d^5\Phi}{d\varphi^5} - 3\,\frac{d\Phi}{d\varphi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^4\Phi}{d\varphi^4} - \frac{d\Phi}{d\varphi}\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)^2 + 3\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)^2\cdot\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3} = 0.$$

Mais ce calcul préalable, loin de rapprocher du but et de faciliter la découverte de l'intégrale cherchée, en éloigne au contraire, en faisant perdre de vue la voie naturelle, qui consiste évidemment à repasser en ordre inverse, et en les intervertissant elles-mêmes, par la série d'opérations, différentielles ou algébriques, dont les symboles, accumulés dans la formule précitée (23), constituent précisément la représentation de l'équation différentielle elle-même, méthode qui devra par conséquent nous conduire beaucoup plus aisément et plus sûrement au but.

5° « *Les trois inconnues* Φ, Ψ, Π *sont de simples fonctions linéaires des sinus carrés d'amplitude de la variable correspondante* ». — Adoptant donc comme point de départ la première des trois équations proposées, savoir

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{\Phi'}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)\right] = 0,$$

une première intégration donnant immédiatement

$$\frac{1}{\Phi'}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right) = 3A \qquad \text{ou} \qquad d\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right) = 3A\,.\,\Phi' d\varphi = 3A d\Phi,$$

une seconde aussi facile donnera semblablement

$$\frac{\Phi'''}{\Phi'} = 3A\Phi + A' \qquad \text{ou} \qquad \Phi''' = 3A\Phi\Phi' + A'\Phi',$$

équation qui pourra être écrite, en multipliant de nouveau par $d\varphi$,

$$\Phi''' d\varphi = 3A\Phi\ \Phi' d\varphi + A'.\Phi' d\varphi, \qquad \text{ou} \qquad d\Phi'' = \tfrac{3}{2}\,A\,.\,2\Phi d\Phi + A' d\Phi,$$

et fournira dès lors à son tour, par une troisième intégration,

$$\Phi'' = \tfrac{3}{2}\,A\Phi^2 + A'\Phi + \tfrac{1}{2}\,A''.$$

Cette dernière enfin, étant elle-même multipliée par $2\Phi' d\varphi$, deviendra

$$2\Phi'\Phi'' d\varphi = A\,.\,3\Phi^2\Phi' d\varphi + A'\;2\Phi\Phi' d\varphi + A''.\,\Phi' d\varphi,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$d\,.\,\Phi'^2 = A\,d\,.\,\Phi^3 + A'd\,.\,\Phi^2 + A''d\Phi,$$

et donnera par conséquent, avec la même facilité :

$$(26)\qquad \Phi'^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = A\Phi^3 + A'\Phi^2 + A''\Phi + A'''.$$

Et dès lors, en extrayant les racines, et séparant les variables, nos trois équations proposées (23) conduiront donc, comme on le voit, pour déterminer les trois inconnues Φ, Ψ, Π, à trois équations de la forme

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} d\varphi &= \frac{d\Phi}{\sqrt{A\Phi^3 + A'\Phi^2 + A''\Phi + A'''}}, \qquad d\psi = \frac{d\Psi}{\sqrt{B\Psi^3 + B'\Psi^2 + B''\Psi + B'''}},\\ d\varpi &= \frac{d\Pi}{\sqrt{C\Pi^3 + C'\Pi^2 + C''\Pi + C'''}},\end{aligned}\right.$$

lesquelles nous fourniront définitivement les expressions cherchées par l'inversion de trois intégrales elliptiques de première espèce, au moyen des douze constantes arbitraires A, B, C, qui figurent dans ces équations, et de trois autres simplement additives h, h', h'', ce qui, avec les trois constantes α, β, γ qui entrent antérieurement dans les expressions (19) de P, Q, R, formera un total de *dix-huit* constantes arbitraires figurant dans les résultats obtenus jusqu'à ce moment.

La forme de l'expression des carrés des trois dérivées Φ'^2, Ψ'^2, Π'^2, est donc bien, comme on voit, exactement celle

pressentie par le merveilleux flair analytique de Lamé (*); mais tandis que sa théorie se borne à établir que cette forme est *suffisante* pour fournir une solution, et ne montre en aucune façon par conséquent que cette solution soit la seule possible, ce fait, capital pour la question qui nous occupe, est établi nettement au contraire par le calcul précédent, qui démontre rigoureusement la *nécessité* de cette même forme d'expression pour les carrés des dérivées considérées.

La question de l'intégration générale des équations différentielles (23), dont nous avons fait un intermédiaire obligé de notre difficile recherche, est donc dès à présent déjà complètement acquise, mais ce serait une erreur grave de croire que ce résultat suffise à lui seul pour nous fournir la solution du problème spécial envisagé dans ce Chapitre. En effet, de même que dans deux autres occasions déjà signalées (pp. 159-160, et 2° p. 287), ces équations (23) ont été introduites dans le calcul au moyen de différentiations successives et multipliées des équations proposées (19) du Chapitre III; leurs intégrales représentent donc encore une solution plus large que celle qui convient à la question, et il y aura lieu, par conséquent, de faire un choix parmi toutes les expressions des fonctions P, Q, R qui résulteraient, par les formules (19) précédentes, des valeurs des inconnues Φ, Ψ, Π, fournies en dernière analyse par l'inversion des intégrales des différentielles (27). En d'autres termes, les expressions de P, Q, R ainsi obtenues, ne vérifieront pas, en l'état, le groupe du second ordre (19) précité, les *dix-huit* constantes énumérées tout à l'heure demeurant toutes arbitraires; et il reste, en conséquence,

(*) Avec cette observation, qu'à la place de nos fonctions Φ, Ψ, Π, qui sont, comme on le verra tout à l'heure, des fonctions linéaires des sinus carrés d'amplitude des variables correspondantes, Lamé introduit dans sa théorie des fonctions A, A_1, A_2 qui n'y entrent que par leurs carrés et leurs dérivées, et qui sont proportionnelles aux sinus d'amplitude eux-mêmes, ce qui revient dès lors à supposer, dans ses équations différentielles correspondant à (26) ou (27), les seconds membres réduits à la forme canonique, qui comporte seulement *trois* termes, tous pairs, ainsi qu'il l'avait supposé expressément à l'avance, fort arbitrairement du reste, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut.

à attribuer à ces constantes, jusqu'à concurrence du nombre nécessaire, des valeurs déterminées, telles que ces trois équations (19) du Chapitre III soient effectivement vérifiées : calcul, en quelque sorte rétrospectif, qui, pour s'imposer le dernier, et au moment où nous pouvions espérer toucher au but, n'en constituera pas moins peut-être la partie la plus laborieuse de notre tâche.

Nous y arriverons cependant, en changeant à la fois de variables et de constantes, et formant alors, à l'aide d'un petit nombre d'identifications, le système complet des relations auxquelles les nouvelles constantes devront satisfaire pour remplir cette condition.

A cette fin, substituant aux neuf constantes A′, A″, A‴, B′, B″, B‴, C′, C″, C‴, neuf autres constantes arbitraires a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2, a''^2, b''^2, c''^2, nous mettrons les trois équations différentielles du premier ordre (27), supposées ramenées préalablement au type équivalent (26), sous la forme, plus commode pour la dernière intégration,

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi'^2 &= \mathrm{A}\,(\Phi + a^2\,)(\Phi + b^2\,)(\Phi + c^2\,),\\ \Psi'^2 &= \mathrm{B}\,(\Psi + a'^2)(\Psi + b'^2)(\Psi + c'^2),\\ \Pi'^2 &= \mathrm{C}\,(\Pi + a''^2)(\Pi + b''^2)(\Pi + c''^2); \end{aligned}\right.$$

et alors le même calcul que nous avons déjà présenté à la fin de notre Chapitre II à l'occasion de l'expression (147), et qui aboutit aux équations (152) et (153), nous donnera, en écrivant respectivement cette fois Φ, φ, g, et h à la place de λ, θ, σ, et τ, pour intégrale générale de la première de ces trois équations (28), la première des trois suivantes (les deux autres résultant d'un calcul tout semblable),

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi &= -a^2\ \mathrm{cn}^2(\,g\varphi + h\,) - b^2\ \mathrm{sn}^2(\,g\varphi + h\,),\\ \Psi &= -\,b'^2\ \mathrm{cn}^2(\,g'\psi + h'\,) - c'^2\ \mathrm{sn}^2(\,g'\psi + h'\,),\\ \Pi &= -\,c''^2\,\mathrm{cn}^2(g''\varpi + h'') - a''^2\,\mathrm{sn}^2(g''\varpi + h''), \end{aligned}\right.$$

h, h', h'', étant les trois nouvelles constantes arbitraires, simple-

ment additives, introduites par cette dernière intégration, et les trois modules k, k', k'', ainsi que les trois coefficients g, g', g'', qui figurent (au moins implicitement) dans ces formules, étant par définition les valeurs (*) :

(30) $$g=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{a^2-c^2},\qquad g'=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{B}}\sqrt{b'^2-a'^2},\qquad g''=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{C}}\sqrt{c''^2-b''^2},$$

(31) $$k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\qquad k'=\sqrt{\frac{b'^2-c'^2}{b'^2-a'^2}},\qquad k''=\sqrt{\frac{c''^2-a''^2}{c''^2-b''^2}}.$$

Car il est visible qu'avec le changement de notation que nous venons de dire, d'une part l'équation différentielle (152) se transformera dans la première équation proposée (28), à la seule condition de faire $\frac{2g}{\sqrt{a^2-c^2}}=\sqrt{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire de prendre pour g la première valeur (30), et que d'autre part l'expression (147),

---

(*) Si l'on aime mieux s'en assurer par un calcul direct, ayant écrit la première des expressions (29) sous la première forme (148) du Chap. II, savoir

$$\Phi=-a^2+(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h),$$

l'on en déduira encore immédiatement, eu égard à la valeur (31) du module k, comme lors des équations (147), (148), (149), et (150),

$$\left\{\begin{aligned}&\Phi+a^2=(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h), \qquad \Phi+b^2=-(a^2-b^2)\,\mathrm{cn}^2(g\varphi+h),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Phi+c^2=-(a^2-c^2)\,\mathrm{dn}^2(g\varphi+h),\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclura, eu égard à la valeur précédente de Φ, comme dans le calcul précité,

$$\begin{aligned}(\Phi+a^2)(\Phi+b^2)(\Phi+c^2)&=(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h)\,\mathrm{cn}^2(g\varphi+h)\,\mathrm{dn}^2(g\varphi+h)\\ &=(a^2-c^2)\left[\frac{a^2-b^2}{2g}\,\frac{d.\mathrm{sn}^2(g\varphi+h)}{d\varphi}\right]^2=(a^2-c^2)\left(\frac{\Phi'}{2g}\right)^2;\end{aligned}$$

et dès lors, en multipliant par A, l'équation proposée, c'est-à-dire la première des trois équations (28), sera vérifiée identiquement à la seule condition de satisfaire à la relation

$$1=\mathrm{A}\,\frac{a^2-c^2}{4g^2},\qquad \text{d'où}\qquad g=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{a^2-c^2}.$$

Par où l'on voit que les expressions ci-dessus (29), dans lesquelles $g, g', g'', k, k' k''$ sont par hypothèse les valeurs (30) et (31), représentent bien les intégrales générales des trois équations du cinquième ordre proposées (23), chacune avec les cinq constantes arbitraires distinctes qu'elle doit renfermer par définition.

dans laquelle on avait, par définition, $u = \sigma\theta + \tau$, se changera bien en même temps dans la première des expressions précédentes (29).

Détermination des constantes arbitraires surabondantes par la vérification a posteriori du groupe des équations du second ordre. — Les intégrales générales demandées étant donc désormais acquises, nous connaissons ainsi par le moyen des expressions (19) et (29), la forme *nécessaire* en φ, ψ, ϖ des fonctions inconnues P, Q, R, dans le Cas le plus général, et nous sommes assurés dès maintenant qu'il sera possible, en choisissant convenablement les constantes, de vérifier avec ces expressions les trois équations du groupe du second ordre (19) du Chapitre III. Il nous reste donc seulement, en l'état, à disposer des ***dix-huit*** constantes

$$(32)\qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & 6, & \gamma, & A, & B, & C, & h, & h', & h'', \\ a, & b, & c, & a', & b', & c', & a'', & b'', & c'', \end{matrix}\right.$$

de manière à procurer effectivement cette vérification, recherche qui consistera évidemment dès lors en de simples identifications.

6° « *Les trois inconnues* P, Q, R, *prises ensemble, renfermeront dans leurs expressions dix constantes complètement arbitraires seulement.* » — A cet effet, nous introduirons, à titre auxiliaire, comme constantes distinctes, en même temps que ces dix-huit premières (32), les *treize* autres suivantes, savoir : d'abord les six quantités g, g', g'', k, k', k'', définies par les égalités ci-dessus (30); puis, en second lieu, les six autres l, m, n, p, q, r, définies semblablement par les six égalités

$$(33)\qquad \left\{\begin{matrix} -l = a^2 - b^2, & -m = b'^2 - c'^2, & -n = c''^2 - a''^2, \\ -p = b'^2 - c''^2, & -q = c''^2 - a^2 & -r = a^2 - b'^2, \end{matrix}\right.$$

et dont les trois dernières satisfont, par conséquent, à la condition

$$(34)\qquad p + q + r = 0;$$

et enfin, pour compléter le nombre total de *trente et une* constantes, une dernière quantité s, que nous nous réservons de définir également un peu plus loin, à l'aide d'une nouvelle relation, en fonction des précédentes déjà énumérées. Et dès lors la question reviendra évidemment à former, sans en omettre aucune, toutes les relations qui devront exister nécessairement, pour procurer la vérification demandée, entre ces trente et une constantes, en sus des relations déjà existantes ou restant à poser, et exprimant les définitions des treize constantes auxiliaires que nous venons de spécifier.

En même temps, nous adopterons dans ce calcul, comme variables indépendantes, à la place de φ, ψ, ϖ, les trois fonctions de ces variables

$$(35)\qquad u=\mathrm{sn}^2(g\varphi+h),\qquad v=\mathrm{sn}^2(g'\psi+h'),\qquad w=\mathrm{sn}^2(g''\varpi+h''),$$

et il arrivera alors qu'avec ces deux nouveaux systèmes, de constantes d'une part, et de variables de l'autre, l'écriture des équations proposées (19) du Chapitre III se trouvera simplifiée, au point de rendre l'identification beaucoup plus facile.

Introduisant donc les constantes (33) et les variables (35) dans les expressions (29), mises préalablement sous la première forme (148) du Chapitre II, nous aurons tout d'abord les nouvelles expressions

$$(35^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} \Phi &= -a^2 + (a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h) = -a^2 - lu,\\ \Psi &= -b'^2 + (b'^2-c'^2)\,\mathrm{sn}^2(g'\psi+h') = -b'^2 - mv,\\ \Pi &= -c''^2 + (c''^2-a''^2)\,\mathrm{sn}^2(g''\varpi+h'') = -c''^2 - nw,\end{aligned}\right.$$

lesquelles, étant reportées à leur tour dans les expressions (19), et tenant compte des valeurs de définition (33) de p, q, r, transformeront ces expressions dans les suivantes :

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \alpha(\Psi-\Pi) = \alpha(p+nw-mv),\\ Q &= 6(\Pi-\Phi) = 6(q+lu-nw),\\ R &= \gamma(\Phi-\Psi) = \gamma(r+mv-lu).\end{aligned}\right.$$

D'autre part, la première de ces expressions (35bis), étant différentiée une première fois, donnera semblablement avec ces nouvelles notations

$$(37) \qquad \Phi' = -l.\frac{du}{d\varphi} = -2lg \operatorname{sn}(g\varphi + h) \operatorname{cn}(g\varphi + h) \operatorname{dn}(g\varphi + h),$$
$$= -2lg\sqrt{u}\sqrt{1-u}\sqrt{1-k^2u},$$

ou, en élevant au carré,

$$(38) \qquad \Phi'^2 = 4l^2g^2u(1-u)(1-k^2u) = 4l^2g^2\left[u-(1+k^2)u^2+k^2u^3\right];$$

puis, en différentiant à nouveau cette dernière expression,

$$2\Phi'\Phi'' = 4l^2g^2\left[1-2(1+k^2)u+3k^2u^2\right]\frac{du}{d\varphi},$$

ou, ce qui est la même chose, en tenant compte de la première équation (37),

$$\Phi'' = -2lg^2\left[1-2(1+k^2)u+3k^2u^2\right].$$

En rapprochant maintenant cette dernière expression de la précédente (38), toutes les formules que nous avons successivement établies obéissant à une loi évidente de permutation circulaire, on voit que nous aurons avec ces nouveaux éléments à la fois les six expressions

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi'^2 = 4l^2g^2.\left[u-(1+k^2)u^2+k^2u^3\right], & \Phi'' = -2lg^2.\left[1-2(1+k^2)u+3k^2u^2\right], \\ \Psi'^2 = 4m^2g'^2.\left[v-(1+k'^2)v^2+k'^2v^3\right], & \Psi'' = -2mg'^2.\left[1-2(1+k'^2)v+3k'^2v^2\right] \\ \Pi'^2 = 4n^2g''^2.\left[w-(1+k''^2)w^2+k''^2w^3\right], & \Pi'' = -2ng''^2.\left[1-2(1+k''^2)w+3k''^2w^2\right] \end{array} \right.$$

et il n'y aura plus dès lors qu'à substituer ces valeurs, en même temps que les expressions (36), dans deux des équations proposées (19) du Chapitre III, supposées mises préalablement sous la forme (21) de celui-ci, et à égaler ensuite à zéro séparément les coefficients des différentes puissances de u, v, w, pour assurer ainsi par de simples identifications la vérification demandée.

A la vérité, cette opération serait encore pratiquement irréali-

sable, si l'on était tenu de l'accomplir, comme dans le calcul proposé par Lamé, intégralement et séparément pour tous les coefficients des différents termes qui entreront dans chaque équation identifiée (21); mais on va voir heureusement qu'il suffira d'accomplir cette opération pour un nombre *très restreint* de ces coefficients, et en choisissant ceux dont l'expression sera la plus simple et la plus facile à obtenir, pour être parfaitement assuré d'avoir réalisé complètement l'identification des trois équations, comme le proposait Lamé, sans fournir en même temps la possibilité de remplir le programme ainsi tracé (*).

En effet, ces trois équations (19) du Chapitre III, ou (21) de celui-ci, devant se transformer en identités lorsque l'on y substituera les valeurs (36) et (39), cette identité se maintiendra dès lors quelles que soient les valeurs particulières que l'on attribue aux variables u, v, w. Or, ces trois équations du type (21), que nous nous proposons d'identifier, étant les suivantes

))
$$\left\{\begin{aligned} 2PQR\,(Q\Psi'' - R\Pi'') &= \frac{\beta\gamma}{\alpha}P^3\Phi'^2 + (2\alpha R - \gamma P)\,Q^2\Psi'^2 + (2\alpha Q - \beta P)R^2\Pi'^2,\\ 2PQR\,(R\Pi'' - P\Phi'') &= \frac{\gamma\alpha}{\beta}Q^3\Psi'^2 + (2\beta P - \alpha Q)\,R^2\Pi'^2 + (2\beta R - \gamma Q)\,P^2\Phi'^2,\\ 2PQR\,(P\Phi'' - Q\Psi'') &= \frac{\alpha\beta}{\gamma}R^3\Pi'^2 + (2\gamma Q - \beta R)\,P^2\Phi'^2 + (2\gamma P - \alpha R)\,Q^2\Psi'^2,\end{aligned}\right.$$

si nous y faisons tout d'abord $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, en spécifiant

---

(*) Au nombre des raisons qui assureront le succès de notre calcul, tandis que celui proposé par Lamé pour le même objet était littéralement impraticable (ainsi qu'il en convient d'ailleurs lui-même en renonçant à l'effectuer), il faut encore compter la précaution que nous avons eue jusqu'ici, et que nous aurons jusqu'au bout dans tout le cours de cette étude, de n'introduire, soit comme quantités variables ou constantes, soit comme équations, que des éléments analytiques satisfaisant à l'une ou à l'autre de ces deux conditions : ou bien de procéder par groupe de trois, s'échangeant les unes dans les autres à l'aide de permutations circulaires évidentes; ou bien de se reproduire identiquement elles-mêmes par le jeu des mêmes permutations circulaires que nous venons de dire : conditions que ne réalisent malheureusement ni les équations, ni les différents systèmes de constantes, de variables, ou de fonctions, sur lesquelles repose la théorie si remarquable et si féconde de Lamé.

à l'aide de l'indice 0 les valeurs correspondantes des différentes fonctions, comme les égalités ci-dessus (39) donneront évidemment $\Phi_0'^2 = 0$, $\Psi_0'^2 = 0$, $\Pi_0'^2 = 0$, il est clair que les deux premières de ces équations se réduiront simplement à

$$2P_0Q_0R_0(Q_0\Psi_0'' - R_0\Pi_0'') = 0, \qquad 2P_0Q_0R_0(R_0\Pi_0'' - P_0\Phi_0'') = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des valeurs (36) et (39) qui donneront de même

$$P_0 = \alpha p, \qquad Q_0 = 6q, \qquad R_0 = \gamma r,$$
$$\Phi_0'' = -2lg^2, \qquad \Psi_0'' = -2mg'^2, \qquad \Pi_0'' = -2ng''^2,$$

aux deux conditions

$$P_0\Phi_0'' = Q_0\Psi_0'' = R_0\Pi_0'',$$

ou bien

$$\alpha p.2lg^2 = 6q.2mg'^2 = \gamma r.2ng''^2.$$

Nous tiendrons donc compte de ces deux conditions, et nous définirons en même temps la dernière constante auxiliaire s, dont nous avons annoncé un peu plus haut l'introduction, en posant, par une raison de symétrie qui s'offre naturellement à l'esprit,

(41) $$s = \alpha plg^2 = 6qmg'^2 = \gamma rng''^2,$$

égalités d'où nous tirerons alors :

(42) $$\alpha lg^2 = \frac{s}{p}, \qquad 6mg'^2 = \frac{s}{q}, \qquad \gamma ng''^2 = \frac{s}{r}.$$

Cela fait, prenant ensuite simplement $v = 0$ et $w = 0$ dans la première des équations (40), et convenant de spécifier semblablement par l'indice 1 les valeurs correspondantes des différentes fonctions, comme les mêmes expressions (39) donneront alors évidemment $\Phi_1'^2 = \Phi'^2$, $\Psi_1'^2 = 0$, $\Pi_1'^2 = 0$, la première équation (40) se réduira de même pour cette hypothèse à

(43) $$2P_1Q_1R_1(Q_1\Psi_1'' - R_1\Pi_1'') = \frac{6\gamma}{\alpha} P_1^3\Phi'^2.$$

Or, les expressions (36) et (39) donnant de leur côté, en tenant compte des égalités (42),

$$\left\{\begin{array}{lll} P_1 = \alpha p, & Q_1 = 6(q + lu), & R_1 = \gamma(r - lu), \\ \Psi_1'' = -2mg'^2 = \dfrac{-2s}{6q}, & & \Pi_1'' = -2ng''^2 = \dfrac{-2s}{\gamma r}, \end{array}\right.$$

d'où l'on conclura

$$Q_1\Psi_1'' - R_1\Pi_1'' = 6(q + lu).\frac{-2s}{6q} - \gamma(r - lu).\frac{-2s}{\gamma r} = -2s\left[1 + \frac{l}{q}u - \left(1 - \frac{l}{r}u\right)\right]$$

$$= -2s\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)lu = \frac{-2sl}{qr}(q + r)u,$$

l'équation en question (43) sera, avec ces valeurs,

$$2\alpha p.6(q + lu).\gamma(r - lu).\frac{-2sl}{qr}(q + r)u = \frac{6\gamma}{\alpha}.\alpha^3p^3.4l^2g^2u\left[1 - (1 + k^2)u + k^2u^2\right],$$

ou, en multipliant par qr, développant, réduisant, et supprimant les deux facteurs communs aux deux membres $4\alpha 6\gamma p l u$ et $s = \alpha p l g^2$,

$$-\left[qr + (r - q)lu - l^2u^2\right](q + r) = pqr\left[1 - (1 + k^2)u + k^2u^2\right].$$

Il faudra donc, pour l'identification, que l'on ait à la fois les deux conditions

$$-qr(q + r) = pqr \qquad \text{ou} \qquad -(q + r) = p,$$

avec

$$-(r - q)l.(q + r) = -pqr(1 + k^2) \qquad \text{et} \qquad l^2.(q + r) = pqrk^2,$$

dont la première est dores et déjà satisfaite par hypothèse, puisqu'elle reproduit simplement la relation (34), et réduit dès lors les deux suivantes, lorsqu'on l'y introduit, à ces deux plus simples :

$$(44) \qquad l(q - r) = (1 + k^2)qr, \qquad l^2 = -k^2qr.$$

Il est bien clair à présent qu'en faisant de même $w = 0$ et $u = 0$ dans la seconde équation (40), on trouverait d'une façon analogue, en identifiant cette fois par rapport à v, les deux autres conditions

$$(45) \qquad m(r - p) = (1 + k'^2) rp, \qquad m^2 = - k'^2 rp;$$

et enfin, en prenant semblablement $u = 0$ et $v = 0$ dans la troisième équation (40), l'identification par rapport à w fournirait alors ces deux dernières conditions

$$(46) \qquad n(p - q) = (1 + k''^2) pq, \qquad n^2 = - k''^2 pq.$$

Munis de ce premier résultat, reprenons le même procédé de recherche, avec un système particulier de valeurs des variables u, v, w, qui soient différentes de zéro, mais choisies de façon à rendre le calcul des substitutions dans les équations proposées (40) aussi simple que possible.

A cet effet, récrivant les deux premières expressions (39) de la façon suivante

$$(47) \qquad \begin{cases} \Phi'^2 = 4lg^2.lu\left[1 - u(1 + k^2 - k^2u)\right], \\ \Phi'' = - 2lg^2\left[1 - 2u(1 + k^2 - k^2u) + k^2u^2\right], \end{cases}$$

nous choisirons pour u la valeur $u = u_2$, définie par l'équation

$$(48) \qquad 1 + k^2 - k^2u_2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u_2 = \frac{1 + k^2}{k^2},$$

parce que l'on voit de suite que, pour cette valeur particulière de u, des deux expressions précédentes, celle de Φ'^2 se réduira à un seul terme, et celle de Φ'' à deux termes seulement au lieu de trois (*).

(*) Il est facile, en effet, d'évaluer à l'avance le nombre énorme de termes que l'on aurait à envisager dans cette substitution, et qu'il faudrait ainsi calculer d'abord séparément, puis réduire, et ordonner, pour un système de valeurs des variables u, v, w, supposées toutes trois différentes de zéro, mais arbitrairement choisies d'ailleurs. Car chacune des neuf expressions (36) et (39) ayant déjà trois termes, on voit que le nombre de termes à former serait séparément, pour le premier membre de chaque équation précitée, (40) de :

Pour calculer commodément les valeurs correspondantes de ces mêmes expressions, les deux conditions déjà acquises (44), nous donneront tout d'abord, en les divisant l'une par l'autre, pour la valeur de u que nous venons de spécifier (48),

$$u_2 = \frac{1 + k^2}{k^2} = \frac{r - q}{l.} \qquad \text{d'où} \qquad lu_2 = r - q,$$

laquelle, en tenant compte de la première égalité (42) et de la seconde (44), réduira les deux valeurs précédentes (47) de Φ'^2 et Φ'' simplement à celles-ci

$$\Phi'^2 = \frac{4s}{\alpha p}(r - q), \qquad \Phi'' = \frac{-2s}{\alpha p}\left(1 + \frac{k^2}{l^2} l^2 u_2^2\right) = \frac{-2s}{\alpha p}\left[1 - \frac{(r - q^2)}{qr}\right].$$

Et par conséquent, si nous envisageons simultanément pour u, v, w, les trois valeurs analogues, fournies par les égalités

$$lu_2 = r - q, \qquad mv_2 = p - r, \qquad nw_2 = q - p,$$

et que, pour plus de clarté, nous spécifions encore par l'indice 2 les valeurs des différentes fonctions correspondantes à ce système particulier de valeurs des trois variables, nous trouverons donc, en premier lieu, d'après le résultat qui précède,

$$(49) \left\{ \begin{aligned} &\Phi_2'^2 = \frac{4s}{\alpha p}(r - q), &&\Psi_2'^2 = \frac{4s}{6q}(p - r), &&\Pi_2'^2 = \frac{4s}{\gamma r}(q - p), \\ &\Phi_2'' = \frac{-2s}{\alpha p}\left[1 - \frac{(r - q)^2}{qr}\right], &&\Psi_2'' = \frac{-2s}{6q}\left[1 - \frac{(p - r)^2}{rp}\right], &&\Pi_2'' = \frac{-2s}{\gamma r}\left[1 - \frac{(q - p)^2}{pq}\right], \end{aligned} \right.$$

$3^3 . 2 . 3^2 = 6 . 3^4 = 6 . 81$, et pour le second membre de : $10 . 3 + 2 . 2 . 3 . 6 . 3 = 2 . 3 (5 + 2 . 6 . 3) = 6 (5 + 36) = 6 . 41$, soit ensemble pour chaque équation de : $6 (81 + 41) = 6 . 122 = 732$.

Pour le système particulier de valeurs u_2, v_2, w_2, que nous choisissons, au contraire, les trois quantités P, Q, R n'ayant plus qu'un seul terme, et les dérivées premières et secondes (49), étant développées et réduites, que deux et trois termes seulement, le nombre des termes analogues à former et à écrire sera dans les mêmes circonstances simplement, pour le premier membre, de : $2 . 1 . 3 = 6$, et pour le second membre de : $1 . 2 + 2 . 1 . 2 = 6$, au total *douse* pour chaque équation, au lieu de 732 que nous avons compté tout à l'heure.

et en second lieu, par les formules (36), et en tenant compte de la relation (34), pour la première fonction P,

$$P_2 = \alpha\left[p + (q-p) - (p-r)\right] = \alpha(-p+q+r) = -2\alpha p,$$

c'est-à-dire par conséquent pour P, Q, R, les valeurs simples

$$(50) \qquad P_2 = -2\alpha p, \qquad Q_2 = -2\beta q, \qquad R_2 = -2\gamma r.$$

Avec ces dernières, calculons séparément les deux membres de l'une quelconque des équations (40), la première par exemple, pour ce même système de valeurs des trois variables.

A cet effet, les valeurs (50) et (49) donnant tout d'abord

$$Q_2\Psi_2'' = 4s\left[1 - \frac{(r-p)^2}{rp}\right], \qquad R_2\Pi_2'' = 4s\left[1 - \frac{(p-q)^2}{pq}\right];$$

nous obtiendrons donc, d'une part, pour ce premier membre,

$$2P_2Q_2R_2(Q_2\Psi_2'' - R_2\Pi_2'') = 2(-2)^3.\alpha p.\beta q.\gamma r.4s\left[-\frac{(r-p)^2}{rp} + \frac{(p-q)^2}{pq}\right]$$

$$= 2^6\alpha\beta\gamma s\left[q(r-p)^2 - r(p-q)^2\right] = 2^6\alpha\beta\gamma s\left[q(r^2 - 2rp + p^2) - r(p^2 - 2pq + q^2)\right]$$

$$= 2^6\alpha\beta\gamma s\left[(q-r)p^2 + qr^2 - rq^2\right] = 2^6\alpha\beta\gamma s(q-r)(p^2 - qr).$$

D'autre part, les mêmes valeurs (50) donnant tout aussi faci lement

$$\begin{cases} 2\alpha R_2 - \gamma P_2 = -2(2\alpha.\gamma r - \gamma.\alpha p) = -2\alpha\gamma(2r-p), \\ 2\alpha Q_2 - \beta P_2 = -2(2\alpha.\beta q - \beta.\alpha p) = -2\alpha\beta(2q-p), \end{cases}$$

nous trouverons successivement pour le second membre de la même équation

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}P_2^3\Phi_2'^2 + (2\alpha R_2 - \gamma P_2)Q_2^2\Psi_2'^2 + (2\alpha Q_2 - \beta P_2)R_2^2\Pi_2'^2$$

$$= \frac{\beta\gamma}{\alpha}(-2)^3\alpha^3p^3.\frac{4s}{\alpha p}(r-q) - 2\alpha\gamma(2r-p).2^2\beta^2q^2.\frac{4s}{\beta q}(p-r)$$

$$- 2\alpha\beta(2q-p).2^2\gamma^2r^2.\frac{4s}{\gamma r}(q-p)$$

$$= -2^5\alpha\beta\gamma s\left[p^2(r-q)+(2r-p).q(p-r)+(2q-p).r(q-p)\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma s\left[p^2(r-q)+(2r-p)(qp-qr)+(2q-p)(rq-rp)\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma s\left[p^2(r-q)+2pqr-qp^2-qr(2r-p)\right.$$
$$\left.+rq(2q-p)-2pqr+rp^2\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma s\left[2p^2(r-q)-qr\{2r-p-(2q-p)\}\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma s\left[2p^2(r-q)-qr.2(r-q)\right]=2^6\alpha\beta\gamma s(q-r)(p^2-qr),$$

résultat identique à celui déjà trouvé pour le premier membre : et il en eût été bien évidemment de même si, au lieu de la première équation (40), nous eussions considéré la seconde ou la troisième, vu qu'elles se déduisent les unes des autres par permutation circulaire, de même que toutes les formules dont nous avons fait usage pour ce calcul.

On voit donc ainsi que pour un système particulier de valeurs des variables *u*, *v*, *w*, non compris dans ceux dont la considération nous avait déjà fourni les neuf conditions (41), (44), (45), et (46), et qui n'a pas été choisi expressément en vue du présent résultat, chacune des équations (40) est encore vérifiée identiquement par le moyen de ces seules conditions. Il est dès lors extrêmement probable que ces neuf conditions, jointes à celle (34) qui existait déjà à l'avance, en vertu de leur définition, sont à elles seules nécessaires et suffisantes pour que ces mêmes équations (40) soient vérifiées, comme on le demande, pour toutes les valeurs possibles des variables *u* et *v*, par les expressions (36) et (39).

Tel est le fait analytique essentiel, dont il nous reste uniquement désormais à nous assurer d'une façon certaine, pour avoir alors entre les mains tous les éléments de la solution.

Cette vérification finale serait sans doute encore une fois une opération fort compliquée, peut-être même impossible pratiquement, en raison du trop grand nombre de termes qu'il faudrait envisager, si l'on était tenu de l'opérer sur les équations proposées elles-mêmes. Mais il est clair que l'on pourra tout aussi

bien y procéder sur les équations transformées dans lesquelles elles se changeront par une substitution linéaire des variables u, v, w, substitution que l'on pourra choisir à volonté, de façon à réduire encore autant que possible le nombre des coefficients à calculer : car l'identité, étant supposée réalisée avec ce système déterminé de variables, se maintiendra encore évidemment lorsqu'on l'abandonnera pour revenir aux variables primitives.

Introduisons donc, dans cette pensée, à la place des variables u, v, w, trois autres variables U, V, W, qui en soient de simples fonctions linéaires, c'est-à-dire définies par les formules

$$(51) \qquad lu = l'\mathrm{U} + l'', \qquad mv = m'\mathrm{V} + m'', \qquad nw = n'\mathrm{W} + n'',$$

et disposons tout d'abord des six coefficients de la substitution l', m', n', l'', m'', n'', de manière à simplifier autant que possible à la fois les expressions (36) et (39). Récrivant donc dans ce but, en premier lieu les deux premières (39), en tenant compte des conditions (41) et (44), ainsi qu'il suit

$$\left\{\begin{aligned} \Phi'^2 &= \frac{4\alpha plg^2}{\alpha p}.\,lu\left[1 - \frac{q-r}{qr}lu - \frac{l^2}{qr}u^2\right] = \frac{4s}{\alpha pqr}\left[qr.\,lu + (r-q)l^2u^2 - l^3u^3\right],\\ \Phi'' &= -\frac{2\alpha plg^2}{\alpha p}\left[1 - 2\frac{q-r}{qr}lu - 3\frac{l^2}{qr}u^2\right] = \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[qr + 2(r-q)lu - 3l^2u^2\right],\end{aligned}\right.$$

puis les transformant par la substitution linéaire (51) dans les suivantes

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi'^2 &= \frac{4s}{\alpha pqr}\left[qr(l'\mathrm{U} + l'') + (r-q)(l'\mathrm{U} + l'')^2 - (l'\mathrm{U} + l'')^3\right]\\ &= \frac{4s}{\alpha pqr}\Big[l''\{qr + (r-q)l'' - l''^2\} + \{qr + 2(r-q)l'' - 3l''^2\}l'\mathrm{U}\\ &\qquad\qquad + (r - q - 3l'')l'^2\mathrm{U}^2 - l'^3\mathrm{U}^3\Big],\\ \Phi'' &= \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[qr + 2(r-q)(l'\mathrm{U} + l'') - 3(l'\mathrm{U} + l'')^2\right]\\ &= \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[qr + 2(r-q)l'' - 3l''^2 + 2(r - q - 3l'')l'\mathrm{U} - 3l'^2\mathrm{U}^2\right],\end{aligned}\right.$$

nous ferons, comme on voit, disparaître l'avant-dernier terme de chacune de ces deux expressions, en déterminant le coefficient l'' de la substitution (51) par la condition

$$(53)\qquad r - q - 3l'' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad l'' = \frac{1}{3}(r - q);$$

auquel cas, d'abord les autres coefficients de ces mêmes expressions auront alors respectivement pour valeurs, eu égard à la relation (34),

$$\left\{\begin{aligned}
l''\{qr + (r-q)\,l'' - l''^2\} &= \frac{r-q}{3}\left[qr + \frac{(r-q)^2}{3} - \left(\frac{r-q}{3}\right)^2\right] \\
&= \frac{r-q}{3^3}\left[3^2qr + 3(r-q)^2 - (r-q)^2\right] = \frac{r-q}{3^3}\left[9qr + 2(r-q)^2\right] \\
&= \frac{r-q}{3^3}\left[qr + 2(r+q)^2\right] = \frac{r-q}{3^3}\left[qr - (q+r)p + p^2\right] \\
&= \frac{r-q}{3^3}(q-p)(r-p) = \frac{1}{3^3}(q-r)(r-p)(p-q) = -\frac{1}{3^3}\,G, \\
qr + 2(r-q)\,l'' - 3l''^2 &= qr + \frac{2}{3}(r-q)^2 - \frac{1}{3}(r-q)^2 = \frac{1}{3}\left[3qr + (r-q)^2\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[-qr + (r+q)^2\right] = \frac{1}{3}\left[-qr - p(r+q)\right] = -\frac{1}{3}(qr + rp + pq) = -\frac{1}{3}\,D,
\end{aligned}\right.$$

en convenant de poser pour ce calcul

$$(54)\qquad D = qr + rp + pq, \qquad G = -(q-r)(r-p)(p-q);$$

et, cela fait, par le moyen de ces dernières valeurs, les deux expressions ci-dessus (52) se réduiront dès lors aux suivantes :

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Phi'^2 &= \frac{4s}{\alpha pqr}\left[-\frac{1}{3^3}G - \frac{1}{3}D.\,l'U - l'^3U^3\right] = \frac{-4s}{3^3\alpha pqr}\left[G + 3D.3l'U + (3l')^3U^3\right], \\
\Phi'' &= \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[-\frac{1}{3}D - 3l'^2U^2\right] \qquad = \frac{2s}{3\alpha pqr}\left[D + (3l')^2U^2\right].
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, si l'on tient compte encore de la relation (34), les valeurs des trois coefficients l'', m'', n'', analogues à (53), savoir

$$(56)\qquad l''=\frac{1}{3}(r-q),\qquad m''=\frac{1}{3}(p-r),\qquad n''=\frac{1}{3}(q-p),$$

donnant alors pour leurs différences deux à deux

$$n''-m''=-p,\qquad l''-n''=-q,\qquad m''-l''=-r,$$

les expressions (36) se changeront de leur côté, par les substitutions (51), dans les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} P&=\alpha\left[p+n'W+n''-(m'V+m'')\right]=\alpha(n'W-m'V),\\ Q&=\beta\left[q+l'U+l''-(n'W+n'')\right]=\beta(l'U-n'W),\\ R&=\gamma\left[r+m'V+m''-(l'U+l'')\right]=\gamma(m'V-l'U).\end{aligned}\right.$$

Si donc, en vue de simplifier encore davantage l'écriture des expressions (55), nous prenons en outre, conjointement avec les valeurs précédentes (56) de l'', m'', n'', pour l', m', n', la valeur commune $l'=m'=n'=\frac{1}{3}$, l'on voit alors, qu'avec les nouvelles variables (51) ainsi définies, les neuf expressions (36) et (39), que nous avons à substituer, auront pris maintenant les valeurs beaucoup plus simples (*)

$$(57)\quad\left\{\begin{aligned} \Phi'^2&=\frac{-4s}{3^3\alpha pqr}(G+3DU+U^3), &\qquad \Phi''&=\frac{2s}{3\alpha pqr}(D+U^2),\\ \Psi'^2&=\frac{-4s}{3^3\beta pqr}(G+3DV+V^3), &\qquad \Psi''&=\frac{2s}{3\beta pqr}(D+V^2),\\ \Pi'^2&=\frac{-4s}{3^3\gamma pqr}(G+3DW+W^3), &\qquad \Pi''&=\frac{2s}{3\gamma pqr}(D+W^2),\end{aligned}\right.$$

$$(58)\qquad P=\frac{\alpha}{3}(W-V)=\frac{\alpha}{3}L,\qquad Q=\frac{\beta}{3}(U-W)=\frac{\beta}{3}M,\qquad R=\frac{\gamma}{3}(V-U)=\frac{\gamma}{3}N,$$

(*) Nous avons dit, dans la note de la page 316 ci-dessus, qu'après la substitution dans les équations (40) des expressions (36) et (39), le nombre des termes en u, v, w qui s'offri-

en convenant encore une fois de désigner par L, M, N les trois différences

$$(59) \qquad L = W - V, \qquad M = U - W, \qquad N = V - U,$$

lesquelles vérifient évidemment les cinq relations

$$(60) \begin{cases} L + M + N = 0, \qquad LU + MV + NW = 0, \\ LMN = -(LU^2 + MV^2 + NW^2), \\ 2N - L = 3V - 2U - W, \qquad 2M - L = -(3W - 2U - V), \end{cases}$$

dont nous aurons à faire usage tout à l'heure.

Avec ces valeurs simplifiées (58) et (57), nous aurons maintenant pour les différents facteurs qui figurent dans la première équation (40), dont il s'agit de vérifier l'identification,

$$\begin{cases} PQR = \frac{\alpha6\gamma}{3^3} LMN, \qquad Q\Psi'' - R\Pi'' = \frac{2s}{3^2 pqr}\left[M(D + V^2) - N(D + W^2)\right], \\ 2\alpha R - \gamma P = \frac{\alpha\gamma}{3}(2N - L), \qquad 2\alpha Q - 6P = \frac{\alpha6}{3}(2M - L). \end{cases}$$

---

raient ainsi, avant toute réduction, les variables restant arbitraires, serait égal pour chacune à 732. En supputant semblablement le nombre des termes analogues en U, V, W, fournis par la substitution des expressions (58) et (57) à la place des précédentes, on reconnaîtra sans peine, exactement de la même façon, en ayant égard aux relations suivantes (60), que ce nombre sera maintenant pour chaque équation, en faisant tout passer dans le premier membre,

$$6.2.4 + 4.3 + 2.3.3.3 = 6(8 + 2 + 9) = 6.19 = 114,$$

au lieu de 732, auxquels donnait naissance la substitution précédente.

Toutefois quelque importante que soit cette réduction dans le nombre total des termes que l'on aurait ainsi à former, puis à réduire et à ordonner, ce n'est point en réalité cette simplification qui assure le succès du calcul que nous allons entreprendre, car ce nombre demeurerait encore évidemment trop grand pour que l'opération devînt pratique, si les coefficients de ces différents termes restaient toujours comme auparavant des fonctions plus ou moins compliquées des 31 constantes considérées dans ce calcul; mais bien plutôt ce fait, que les nouveaux développements en question ne contiendront plus comme constantes que les deux seules quantité (54) D et G, par rapport auxquelles ils sont linéaires comme les expressions (57) elles-mêmes : ce qui permettra, en ordonnant ces développements par rapport à ces constantes, de n'avoir plus à considérer que des polynômes homogènes du 6e degré au plus en U, V, W, à coefficients exclusivement *numériques et entiers*, et d'ailleurs fort simples, et par conséquent infiniment plus faciles à calculer et à réduire.

En remettant donc ces différentes valeurs, ainsi que les dérivées premières (57), et la valeur (58) de P, dans l'équation en question, nous trouverons alors pour résultat

$$2\,\frac{\alpha\beta\gamma}{3^3}\,\mathrm{LMN}.\frac{2s}{3^2pqr}\left[\mathrm{M}\,(\mathrm{D}+\mathrm{V}^2)-\mathrm{N}\,(\mathrm{D}+\mathrm{W})^2\right]$$
$$=\frac{-4s}{3^5pqr}\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^3\mathrm{L}^3}{3^3}\cdot\frac{1}{\alpha}(\mathrm{G}+3\mathrm{DU}+\mathrm{U}^3)+\frac{\alpha\gamma}{3}(2\mathrm{N}-\mathrm{L}).\frac{\beta^2\mathrm{M}^2}{3^2}\cdot\frac{1}{\beta}(\mathrm{G}+3\mathrm{DV}+\mathrm{V}^3)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\beta}{3}(2\mathrm{M}-\mathrm{L}).\frac{\gamma^2\mathrm{N}^2}{3^2}(\mathrm{G}+3\mathrm{DW}+\mathrm{W}^3)\right],$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, supprimant le facteur $\frac{4s\alpha\beta\gamma}{3^6pqr}$, et désignant pour un instant par Δ le résultat ainsi obtenu,

$$\Delta = 3\mathrm{LMN}\left[\mathrm{M}\,(\mathrm{D}+\mathrm{V}^2)-\mathrm{N}\,(\mathrm{D}+\mathrm{W}^2)\right]+\mathrm{L}^3(\mathrm{G}+3\mathrm{DU}+\mathrm{U}^3)$$
$$+\mathrm{M}^2(2\mathrm{N}-\mathrm{L})(\mathrm{G}+3\mathrm{DV}+\mathrm{V}^3)+\mathrm{N}^2(2\mathrm{M}-\mathrm{L})(\mathrm{G}+3\mathrm{DW}+\mathrm{W}^3),$$

expression qui devra dès lors, si nos prévisions sont bien exactes, être identiquement nulle.

Pour procéder à cette vérification, après avoir développé le second membre, au lieu de l'ordonner par rapport aux puissances de U, V, W, il sera plus commode de l'ordonner par rapport aux deux constantes G et D, qui y figurent seules, et par rapport auxquelles il est linéaire; c'est-à-dire que nous écrirons cette même expression sous la forme

$$\Delta = \mathcal{A}\mathrm{G} + 3\,\mathcal{B}\mathrm{D} + \mathcal{C},$$

les trois coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ne contenant plus dès lors dans leurs expressions que les seules quantités U, V, W, par rapport auxquelles elles seront homogènes, et respectivement des 3ᵉ, 4ᵉ, et 6ᵉ degrés. Et nous nous assurerons alors, sans trop de difficulté, à l'aide des valeurs de définition (59), et des relations (60) qui en découlent, que chacun de ces trois coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, est bien identiquement nul.

En effet, en premier lieu, pour le coefficient $\mathcal{A}$, dont l'expression de définition est, d'après ce que nous venons de dire,

$$\mathcal{A} = L^3 + M^2(2N - L) + N^2(2M - L),$$

la première relation (60) donnant immédiatement

$$L = -(M + N), \tag{61}$$

il est clair que cette même expression $\mathcal{A}$ pourra être écrite successivement, en partant de celle qui précède,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= L(M + N)^2 + 2MN(M + N) - L(M^2 + N^2) \\ &= L(M^2 + 2MN + N^2) - 2MN.L - L(M^2 + N^2) = 0. \end{aligned}$$

En second lieu, pour le coefficient $\mathcal{B}$, remarquant tout d'abord que les valeurs de définition (59) et la seconde relation (60) donnent semblablement

$$M - N = 2U - V - W, \qquad -LU = MV + NW, \tag{62}$$

et par suite, en tenant compte aussi de la précédente (61),

$$\left\{ \begin{aligned} & UL^2 - VM^2 - WN^2 = U(M^2 + 2MN + N^2) - VM^2 - WN^2 \\ & \quad = (U - V)M^2 + (U - W)N^2 + 2UMN = -NM^2 + MN^2 + 2UMN \\ & \quad = MN\left[-(M - N) + 2U\right] = MN\left[-(2U - V - W) + 2U\right] \\ & \quad = MN(V + W), \end{aligned} \right. \tag{62 bis}$$

l'expression du second coefficient $\mathcal{B}$, dont la valeur de définition est

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= LMN(M - N) + L^2U + M^2(2N - L)V + N^2(2M - L)W \\ &= LMN(M - N) + L(UL^2 - VM^2 - WN^2) + 2MN(MV + NW), \end{aligned}$$

équivaudra par conséquent, en vertu des trois relations (62) et (62 bis) que nous venons d'établir, à celle-ci

$$\mathcal{B} = LMN(2U - V - W) + L.MN(V + W) - 2MN.LU = 0.$$

Enfin, pour le dernier coefficient $\mathcal{C}$, dont l'expression est la plus compliquée des trois, à savoir

$$\mathcal{C} = 3LMN(MV^2 - NW^2) + L^3U^3 + M^2(2N - L)V^3 + N^2(2M - L)W^3,$$

celle-là encore se transformera sans trop de peine, à l'aide des relations ci-dessus établies (60), ainsi qu'il suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= -3(LU^2 + MV^2 + NW^2)(MV^2 - NW^2) + L^3U^3 + M^2(3V - 2U - W)V^3 \\
&\qquad - N^2(3W - 2U - V)W^3 \\
&= -3(LM.U^2V^2 + M^2.V^4 + MN.V^2W^2 - NL.W^2U^2 - MN.V^2W^2 - N^2W^4) \\
&\quad + L^3.U^3 + 3M^2.V^4 - M^2.(2U + W)V^3 - 3N^2.W^4 + N^2.(2U + V)W^3;
\end{aligned}$$

ou encore, en réduisant, et remettant à la place de L, M, N leurs valeurs de définition (59),

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= -3\left[(W - V)(U - W).U^2V^2 - (V - U)(W - V).W^2U^2\right] \\
&\quad + (W - V)^3.U^3 - (U - W)^2.(2U + W)V^3 + (V - U)^2.(2U + V)W^3 \\
&= -3\left[(WU - UV - W^2 + VW).U^2V^2 - (VW - WU - V^2 + UV).W^2U^2\right] \\
&\quad + (W^3 - 3VW^2 + 3WV^2 - V^3)U^3 \\
&\quad - (U^2 + W^2 - 2UW)(2UV^3 + WV^3) + (V^2 + U^2 - 2VU)(2UW^3 + VW^3) \\
&= -3(U^3V^2W - U^3V^3 + U^2V^3W) + 3(U^2VW^3 - U^3W^3 + U^3VW^2) \\
&\quad + (U^3W^3 - 3U^3VW^2 + 3U^3V^2W - U^3V^3) \\
&\quad - (2U^3V^3 + 2UV^3W^2 - 4U^2V^3W + U^2V^3W + V^3W^3 - 2UV^3W^2) \\
&\quad + (2UV^2W^3 + 2U^3W^3 - 4U^2VW^3 + V^3W^3 + U^2VW^3 - 2UV^2W^3) = 0,
\end{aligned}$$

tous les termes sans exception se détruisant deux à deux, ainsi qu'il est facile de le reconnaitre.

Et l'on vérifierait exactement de même que les deux autres équations (40) se réduisent elles aussi à de simples identités, car il est clair que, par le même calcul, elles prendraient alors la forme

$$\mathcal{A}'G + 3\mathcal{B}'D + \mathcal{C}' = 0, \qquad \mathcal{A}''G + 3\mathcal{B}''D + \mathcal{C}'' = 0,$$

les deux groupes $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}')$, $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'', \mathcal{C}'')$ se déduisant évi-

demment du groupe (𝒜, ℬ, 𝒞) par la simple permutation circulaire des trois lettres U, V, W, et, par conséquent, étant encore composés l'un et l'autre de trois expressions identiquement nulles.

Nos prévisions sont donc bien réalisées, et nous sommes sertains à présent que les neuf relations entre les constantes (41), (44), (45), et (46), jointes à celle (34) qui existait antérieurement entre elles, comme conséquence de leur définition, sont *nécessaires* et suffisantes pour que les expressions (19) et (29) fournissent une solution du problème : ce qui revient à dire que cette même solution sera alors *la plus générale* possible, si les constantes qui y figurent ne sont astreintes qu'à *ces seules* conditions.

Formation de la solution définitive du problème spécial envisagé dans ce chapitre. — Il ne nous reste donc plus maintenant qu'à donner à la solution ainsi obtenue une forme telle, qu'elle ne renferme plus que des constantes indépendantes les unes des autres, et, par conséquent, individuellement arbitraires.

Si, dans ce but, l'on jette un coup d'œil en arrière sur l'ensemble de ce calcul, depuis le moment où nous avons déterminé les inconnues Φ, Ψ, Π, à l'aide des équations différentielles (28), jusqu'à celui où nous nous sommes proposé de reconnaître que les conditions déjà rencontrées par nous entre les constantes étaient suffisantes pour procurer une solution (p. 319), on reconnaîtra sans peine qu'entre les 31 constantes déjà énumérées qui figurent dans ce calcul, savoir les 18 (32), les 12

(63) $$g,\ g',\ g'',\qquad k,\ k',\ k'',\qquad l,\ m,\ n,\qquad p,\ q,\ r,$$

et enfin la constante s, nous avons établi successivement, tant comme définitions que comme résultats des calculs, 21 relations distinctes seulement, savoir les 3 (30), les 3 (31), les 6 (33) (*),

(*) La relation (34) ne doit plus maintenant entrer en ligne de compte, attendu qu'elle n'est pas distincte des équations (33) actuellement envisagées, dont elle est une simple conséquence algébrique.

les 3 (41), et les 6 (44), (45), et (46), en sorte que la solution obtenue par le moyen de ces conditions, qui est la plus générale possible, ainsi que nous venons de le dire, devra contenir dès lors dans son expression *dix* constantes individuellement arbitraires, et ne pourra en renfermer davantage. Il résulte de là que si, par un procédé quelconque, nous venons à rencontrer un système de ces 31 constantes qui vérifient à la fois les 21 relations précitées, et pas d'autres en sus, c'est-à-dire telles qu'après ces vérifications il en subsiste encore dix individuellement arbitraires, l'on pourra affirmer en toute certitude que ce système de constantes, étant introduit dans les expressions (19) et (29), fournira précisément la solution la plus générale du problème qu'il s'agissait de trouver.

Or, d'une part, si, conservant toujours les douze relations (30), (31), et (33), nous éliminons en conséquence par leur moyen, des neuf autres relations, les douze constantes (63) qu'elles avaient pour but de définir, il est bien facile de voir que les neuf relations transformées, ainsi obtenues entre les dix-neuf autre constantes, qui seront alors, en intervertissant leur ordre, et chassant les dénominateurs, au lieu de (44), (45), (46), et (41), celles-ci (*)

(*) Nous écrivons en premier lieu les équations de droite des trois couples d'équations (44), (45), et (46), puis les équations de gauche des mêmes couples, et enfin les trois équations (41). Cette disposition présente l'avantage de mettre tout naturellement sur la voie du système de solution (64), que nous indiquons pour l'ensemble des neuf équations en question.

En effet, comme la première ligne de ce système (64) fournit une solution qui s'offre, pour ainsi dire, d'elle-même à l'esprit, relativement au premier des trois groupes précités, l'on se trouve ainsi rationnellement conduit à essayer si cette même solution ne vérifierait pas également le second groupe; et comme on aperçoit sans peine qu'il en est bien ainsi, la seconde ligne du système (64) résulte dès lors du troisième groupe comme conséquence naturelle et immédiate.

Peut-être l'ensemble de ces circonstances aurait-il moins de chances d'être aperçu, en examinant ces diverses équations dans l'ordre indiqué par les numéros ou la disposition de celles dont elles proviennent, c'est-à-dire dans l'ordre même où nous avons successivement rencontré celles-ci au cours de notre théorie.

$$(a^2 - b^2)^2 = -\frac{a^2 - b}{a^2 - c^2}(c''^2 - a^2)(a^2 - b'^2),$$

$$(b'^2 - c'^2)^2 = -\frac{b'^2 - c'^2}{b'^2 - a'^2}(a^2 - b'^2)(b'^2 - c''^2),$$

$$(c''^2 - a''^2)^2 = -\frac{c''^2 - a''^2}{c''^2 - b''^2}(b'^2 - c''^2)(c''^2 - a^2),$$

$$(a^2 - b^2)[(a^2 - b'^2) - (c''^2 - a^2)] = -\frac{(a^2 - c^2) + (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}(c''^2 - a^2)(a^2 - b'^2),$$

$$(b'^2 - c'^2)[(b'^2 - c''^2) - (a^2 - b'^2)] = -\frac{(b'^2 - a'^2) + (b'^2 - c'^2)}{b'^2 - a'^2}(a^2 - b'^2)(b'^2 - c''^2),$$

$$(c''^2 - a''^2)[(c''^2 - a^2) - (b'^2 - c''^2)] = -\frac{(c''^2 - b''^2) + (c''^2 - a''^2)}{c''^2 - b''^2}(b'^2 - c''^2)(c''^2 - a^2),$$

$$= \alpha(b'^2 - c''^2)(a^2 - b^2).\frac{A}{4}(a^2 - c^2) = \beta(c''^2 - a^2)(b'^2 - c'^2).\frac{B}{4}(b'^2 - a'^2),$$

$$= \gamma(a^2 - b'^2)(c''^2 - a''^2).\frac{C}{4}(c''^2 - b''^2),$$

seront satisfaites simultanément en établissant à nouveau entre les mêmes constantes les neuf relations très simples

$$(64) \quad \begin{cases} a = a' = a'', \qquad b = b' = b'', \qquad c = c' = c'', \\ \alpha A = \beta B = \gamma C = \dfrac{-4s}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}. \end{cases}$$

D'autre part, en introduisant alors ces nouvelles hypothèses dans la solution obtenue, c'est-à-dire dans les expressions (19) et (29), où g, g', g'', k, k', k'' sont supposés représenter les valeurs (30) et (31), comme cette même solution consistera alors dans l'ensemble des formules suivantes

$$(65) \qquad P = \alpha(\Psi - \Pi), \qquad Q = \beta(\Pi - \Phi), \qquad R = \gamma(\Phi - \Psi),$$

$$(66) \quad \begin{cases} \Phi = -a^2 \operatorname{cn}^2(g\varphi + h) - b^2 \operatorname{sn}^2(g\varphi + h), \\ \Psi = -b^2 \operatorname{cn}^2(g'\psi + h') - c^2 \operatorname{sn}^2(g'\psi + h'), \\ \Pi = -c^2 \operatorname{cn}^2(g''\varpi + h'') - a^2 \operatorname{sn}^2(g''\varpi + h''), \end{cases}$$

$$
(67)\quad \left\{
\begin{aligned}
g &= \sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}, & k &= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\\
g' &= \sqrt{\frac{s}{\beta}}\,\frac{1}{\sqrt{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}}, & k' &= \sqrt{\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}},\\
g'' &= \sqrt{\frac{s}{\gamma}}\,\frac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}, & k'' &= \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}},
\end{aligned}
\right. \quad (^*)
$$

et qu'elle renfermera, comme on voit, *dix* constantes complètement arbitraires, savoir α, β, γ, a^2, b^2, c^2, h, h', h'', et s, toutes les autres qui y figurent, c'est-à-dire g, g', g'', k, k', k'', étant exprimées en fonction de celles-là, on reconnait par là, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure (p. 328), que cette solution que nous venons d'écrire constitue bien dès lors la solution la plus générale cherchée : c'est-à-dire les valeurs les plus générales des inconnues P, Q, R, qui satisfont à la fois aux trois conditions (8) ou (9) du Chapitre III, aux trois équations du premier ordre (13), et aux trois équations du second ordre (19), du même Chapitre.

7° « *Si l'on prend pour variables indépendantes les fonctions* Φ, Ψ, Π, *à la place de* φ, ψ; ϖ, *l'expression, pour le Cas le plus général, des trois invariants* Δ_1 *relatifs à ces nouvelles coordonnées, sera exactement la même, à un même facteur constant*

(*) Si l'on suppose, suivant l'usage, les trois constantes réelles (positives ou négatives) a^2, b^2 c^2 rangées par grandeur relative dans l'ordre : $a^2 > b^2 > c^2$, le module k' est alors imaginaire, et le module k'', bien que réel, est toutefois plus grand que l'unité. Cette circonstance n'empêche pas néanmoins, ainsi que nous le montrerons au début de notre Chapitre VI, à l'aide des deux groupes de formules classiques *des modules complémentaires*, et des *modules réciproques*, à la seule condition de disposer convenablement de la forme des constantes additives h' et h'', et du signe des constantes arbitraires réelles α, β, γ, et s, que les trois expressions ci-dessus des fonctions Φ, Ψ, Π, et par suite aussi des inconnues P, Q, R, ne soient toutes réelles pour des valeurs réelles des coordonnées φ, ψ, ϖ, et ne puissent alors toutes s'exprimer assez simplement à l'aide de sinus d'amplitude de *forme canonique*, c'est-à-dire tous relatifs au même module k, réel et plus petit que l'unité dans l'hypothèse précitée.

près, que pour le Système Ellipsoïdal, ou des Coordonnées Elliptiques. » — Nous voici donc enfin parvenu au terme de la laborieuse recherche que nous avions assignée comme objet à ce Chapitre. Nous la résumerons en quelque sorte, et donnerons au résultat une forme concrète, plus simple à énoncer sinon plus facile à saisir, en l'exprimant par la proposition analytique que nous venons de formuler, et dont la démonstration occupera les deux dernières pages du dit Chapitre.

En effet, si nous convenons de désigner semblablement par H_1, K_1, J_1, les trois quantités analogues, dans le système des nouvelles coordonnées Φ, Ψ, Π, aux trois quantités H, K, J, définies par les formules (10) du Chapitre précédent, comme le même élément d'arc ds aura en même temps pour expression de son carré, dans les deux systèmes, les deux valeurs

$$ds^2 = H d\varphi^2 + K d\psi^2 + J d\varpi^2 = H_1 d\Phi^2 + K_1 d\Psi^2 + J_1 d\Pi^2$$
$$= H_1 . \Phi'^2 d\varphi^2 + K_1 . \Psi'^2 d\psi^2 + J_1 . \Pi'^2 d\varpi^2,$$

il est clair qu'il faudra, vu l'indépendance relative des différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$, que l'on ait séparément

$$(68) \qquad H = H_1 \Phi'^2, \qquad K = K_1 \Psi'^2, \qquad J = J_1 \Pi'^2.$$

Or, d'une part, les valeurs (65), obtenues pour P, Q, R, donneront, par les formules (10) du Chapitre III précitées, pour H, K, J, les expressions

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H = 6\gamma (\Pi - \Phi)(\Phi - \Psi), & K = \gamma\alpha (\Phi - \Psi)(\Psi - \Pi), \\ & \alpha 6 (\Psi - \Pi)(\Pi - \Phi). \end{array} \right.$$

D'autre part, si l'on introduit dans les expressions (28) des dérivées Φ', Ψ', Π' les nouvelles conditions (64), et que l'on convienne de représenter désormais, pour abréger l'écriture, par G, la constante

$$(70) \qquad G = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2),$$

et de nouveau, comme dans le Chapitre II (pp. 97-98), par $f(\Omega)$, quel que soit Ω, le polynôme du troisième degré

$$(71)\qquad f(\Omega) = (\Omega + a^2)(\Omega + b^2)(\Omega + c^2),$$

lesdites expressions (28) deviendront alors simplement

$$(72)\qquad \Phi'^2 = \frac{-4s}{G\alpha} f(\Phi), \qquad \Psi'^2 = \frac{-4s}{G\beta} f(\Psi), \qquad \Pi'^2 = \frac{-4s}{G\gamma} f(\Pi).$$

L'on pourra tirer, par conséquent, des relations précédentes (68), en tenant compte des expressions (69) et (72), pour les quantités H_1, K_1, J_1, les valeurs

$$(73)\qquad \begin{cases} H_1 = \Delta_1^{-2}\Phi = \dfrac{H}{\Phi'^2} = \dfrac{G\alpha\beta\gamma}{s} \dfrac{(\Phi - \Psi)(\Phi - \Pi)}{4f(\Phi)}, \\ K_1 = \Delta_1^{-2}\Psi = \dfrac{K}{\Psi'^2} = \dfrac{G\alpha\beta\gamma}{s} \dfrac{(\Psi - \Pi)(\Psi - \Phi)}{4f(\Psi)}, \\ J_1 = \Delta_1^{-2}\Pi = \dfrac{J}{\Pi'^2} = \dfrac{G\alpha\beta\gamma}{s} \dfrac{(\Pi - \Phi)(\Pi - \Psi)}{4f(\Pi)}; \end{cases}$$

et enfin, de ces dernières égalités elles-mêmes, en représentant par $\frac{1}{d^2}$ la constante $\frac{G\alpha\beta\gamma}{s}$, c'est-à-dire en posant

$$(74)\qquad d^2 = \frac{s}{G\alpha\beta\gamma} = \frac{s}{\alpha\beta\gamma(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)},$$

l'on conclura définitivement, pour les invariants Δ_1 relatifs aux trois nouvelles coordonnées, les trois expressions

$$(75)\qquad \begin{cases} \Delta_1\Phi = 2d.\sqrt{\dfrac{f(\Phi)}{(\Phi - \Psi)(\Phi - \Pi)}}, \qquad \Delta_1\Psi = 2d.\sqrt{\dfrac{f(\Psi)}{(\Psi - \Pi)(\Psi - \Phi)}}, \\ \Delta_1\Pi = 2d.\sqrt{\dfrac{f(\Pi)}{(\Pi - \Phi)(\Pi - \Psi)}}, \end{cases}$$

qui ne renferment plus dès lors que les quatre constantes complètement arbitraires a, b, c, d, et qui se confondent, comme on voit, avec les expressions particulières propres au Système Ellipsoïdal, en attribuant simplement au coefficient d la valeur $d = 1$.

Ce résultat, si net et si limité, que rien dans les données analytiques ne permettait de prévoir, fait déjà pressentir une étroite connexité entre le Cas le plus général et le Cas particulier du Système Ellipsoïdal. Toutefois, nous n'apercevons aucun moyen sûr de tirer de ce fait analytique si remarquable aucune conclusion précise et certaine, au sujet de la délimitation des familles de surfaces qui devront entrer dans la composition du système. C'est pourquoi il nous est nécessaire, tout comme si la susdite coïncidence ne se fût pas révélée, de rechercher dans le Chapitre suivant les équations les plus générales de ces familles de surfaces, ou, ce qui revient au même, les relations entre les coordonnées rectilignes d'une part, et curvilignes de l'autre, à l'aide de la méthode générale que nous avons indiquée pour cet objet, en posant le problème, dans notre Chapitre III (*).

(*) *Erratum* au ch. II, t. XIII des *Annales*. L'équation (47) (page 55) doit être rétablie ainsi qu'il suit :

$$(47) \quad k^2h^2(\rho^2)^3 - [k^2(x^2+y^2+z^2)+(1+k^2)h^2](\rho^2)^2 + [x^2+y^2+k^2(x^2+z^2)+h^2]\rho^2 - x^2 = 0.$$

SUR LE PENDULE DE FOUCAULT

PAR

M. le Cte de SPARRE

Professeur à la Faculté catholique des sciences de Lyon.

INTRODUCTION.

Les résultats du présent mémoire ont fait l'objet d'une communication à l'Académie des sciences, dans la séance du 6 octobre 1890; de plus, la première partie de ce travail est en partie la reproduction d'un mémoire présenté dans la même séance à l'Académie (*).

J'ai cru toutefois utile de donner des développements plus complets au sujet des termes en ω^2 et des causes perturbatrices secondaires.

Dans la seconde partie du mémoire, j'étudie l'influence de la résistance de l'air; mais avant d'aborder le problème pour le pendule de Foucault, j'ai dû donner une solution complète du mouvement du pendule plan dans l'air, dans le cas des amplitudes quelconques; c'est ce qui fait l'objet du premier paragraphe de cette seconde partie.

(*) Ce mémoire a été l'objet d'un rapport de M. Résal lu dans la séance du 13 avril 1891.

PREMIÈRE PARTIE.

MOUVEMENT DU PENDULE DE FOUCAULT DANS LE VIDE.

I

Nécessité de tenir compte, dans l'établissement des équations du pendule de Foucault, des termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω de la rotation de la terre.

Dans l'étude des mouvements à la surface de la terre, on ne conserve pas, en général, les termes en ω^2, parce que, d'une part, ces termes ont une influence si faible, que les expériences les plus rigoureuses seraient, le plus souvent, impuissantes à la constater, et que, d'autre part, ainsi que l'a fait remarquer M. Puiseux, on se trouve en présence d'autres forces perturbatrices secondaires (action des astres, variation de la pesanteur comme grandeur et comme intensité, suivant la position que prend le pendule pendant son mouvement), qui sont d'un ordre au moins égal à celui de ω^2.

Pour le pendule de Foucault, nous négligerons également les termes en ω^2 dans les résultats finals; mais, ainsi que nous le verrons, il n'est pas permis de le faire *a priori* dans les équations qui servent de point de départ.

Ceci tient à ce que les équations qui déterminent soit l'angle d'écart θ du pendule, soit son azimut φ, appartiennent en réalité à la catégorie des intégrales singulières, dont M. Hermite a fait des applications si remarquables à propos de la théorie des coupures.

En effet, si nous considérons d'abord l'expression de θ, certains termes en ω^2 qui y figurent contiennent $\sin^2\theta$ en dénominateur, de telle sorte que lorsqu'on les néglige, on ne fait varier la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ que d'un terme en ω^2, tant que θ n'est pas lui-même très petit de l'ordre de ω; mais lorsque θ sera très petit de l'ordre

de ω, on fera, en les négligeant, éprouver une variation finie à $\frac{d\theta}{dt}$ et, par suite, à θ une variation de l'ordre de ω, puisque l'intervalle des limites qui correspondent aux valeurs de θ, très petites de l'ordre de ω, est lui-même de l'ordre de ω.

Si ensuite nous considérons l'intégrale qui donne la valeur de φ, nous verrons que tous les éléments de cette intégrale sont très petits de l'ordre de ω, *sauf ceux pour lesquels* θ *est lui-même très petit de l'ordre de* ω. Ces derniers contenant $\sin^2\theta$ en dénominateur, au lieu d'être très petits de l'ordre de ω, sont, au lieu de cela, très grands de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, de telle sorte que ces derniers éléments prennent une influence absolument prépondérante et que l'intégrale a une valeur finie au lieu d'avoir une valeur très petite de l'ordre de ω.

Or, si nous négligions les termes en ω^2 pour les valeurs très petites de θ dans l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$, nous négligerions en réalité, ainsi que nous l'avons dit, des termes en ω dans θ, et nous ferions par suite éprouver à l'intégrale qui détermine φ une variation qui non seulement pourrait être finie, mais même, dans certains cas, pourrait devenir infinie.

C'est en particulier ce qui arriverait si, négligeant dans l'expression de $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ tous les termes qui contiennent ω^2 en facteur, on prenait

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

car alors θ deviendrait nul pour une certaine valeur de *t*, et la valeur de φ, qui contient l'intégrale

$$\int \frac{dt}{\sin^2\theta},$$

deviendrait infinie.

Il résulte donc de là qu'il y a certains termes en ω^2 qu'il est indispensable de conserver dans les calculs intermédiaires, et que, par suite, pour se mettre à l'abri de toute objection, il convient d'établir les équations du mouvement en conservant tous les termes en ω^2.

Toutefois, les causes perturbatrices secondaires ayant une importance supérieure à celle des termes en ω^2, il faudra également en tenir compte dans les équations afin de voir si, par suite de la nature singulière des intégrales que nous avons à considérer, elles ne pourraient pas donner naissance à des termes de l'ordre de ω dans les résultats finals.

II

Équations du mouvement lorsqu'on tient compte des termes en ω^2 et des causes perturbatrices secondaires.

Nous étudierons d'abord l'influence de la rotation de la terre en tenant compte des termes en ω^2, puis celle des causes perturbatrices secondaires.

1° *Influence de la rotation de la terre.* — Soit O le point de suspension du pendule. Si l'on considérait le mouvement de ce pendule par rapport à trois axes de direction invariable, passant par le point O, on pourrait faire abstraction du mouvement de translation de ce point, à condition d'appliquer à chaque point du système mobile la force fictive correspondante (les axes étant de direction invariable, il n'y a pas de force centrifuge composée). L'accélération de cette force fictive est égale et contraire à l'accélération du point O; si donc CP est l'axe de rotation de la terre, elle sera égale à ω^2.OP et dirigée dans le sens PO. C'est, en un mot, l'accélération de la force centrifuge du point O, fixe par rapport à la terre.

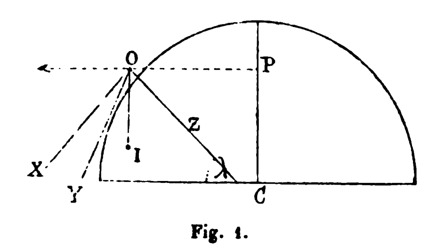


Fig. 1.

Cette force est constante, comme grandeur et comme direction, pour tous les points du système que nous considérons, et elle se combinera avec l'attraction de la terre au point O pour donner une résultante que l'on considère comme étant la pesanteur au point O, et dont on désigne l'accélération par g.

Considérons maintenant, au lieu de trois axes de direction invariable passant par le point O, trois axes fixes par rapport à la terre et ayant pour origine ce même point O.

L'axe OZ aura la direction de la pesanteur *au point* O, telle que nous venons de la définir plus haut; l'axe OX sera perpendiculaire à OZ dans le plan du méridien et dirigé vers l'équateur; l'axe des *y*, perpendiculaire au plan ZOX et dirigé vers l'est. Nous nous supposons dans l'hémisphère boréal.

Désignons de plus par λ l'angle de OZ avec le plan de l'équateur, et par n et m les composantes de la vitesse angulaire ω de la rotation de la terre suivant OZ et OX, de telle sorte que l'on a

$$n = \omega \sin \lambda, \quad m = \omega \cos \lambda.$$

Si nous étudions maintenant le mouvement par rapport à ces axes de direction mobile, il faudra joindre aux forces considérées plus haut (attraction de la terre et force centrifuge du point O) les forces fictives correspondant à la rotation ω, qui se fait autour d'un axe OI parallèle à PC, passant par O.

Ces forces sont la force d'inertie dans le mouvement d'entraînement, ici force centrifuge, et la force centrifuge composée.

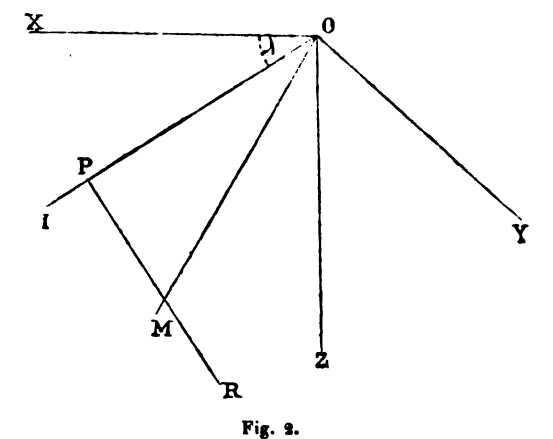


Fig. 2.

Soient OX, OY, OZ nos trois axes et OI la parallèle à l'axe de la terre suivant laquelle est dirigée la rotation ω (située dans le plan XOZ).

Si M est la position du pendule, que MP soit perpendiculaire à OI et que nous posions

$$MP = r,$$

la force centrifuge sera dirigée suivant le prolongement MR de PM, et égale à

$$\omega^2 r.$$

(Nous prenons la masse du pendule égale à 1.) Le travail élémentaire de cette force étant

$$\omega^2 r dr,$$

il existera pour elle un potentiel U donné par la formule

$$U = C + \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Mais si nous désignons par l la longueur du pendule,

$$r^2 = l^2 - \overline{OP}^2,$$

comme OP est la projection de OM sur OI, nous aurons, en désignant par θ l'angle d'écart du pendule et par φ son azimut, compté dans le sens de gauche à droite à partir du plan ZOX,

$$OP = l \cos\theta \sin\lambda + l \sin\theta \cos\varphi \cos\lambda\,;$$

d'où, par suite,

$$U = C + \frac{\omega^2 l^2}{2} - \frac{\omega^2 l^2}{2}(\cos\theta \sin\lambda + \sin\theta \cos\varphi \cos\lambda)^2,$$

ou, en désignant par C_1 une nouvelle constante,

$$(1)\ldots\quad U = C_1 - l^2 \frac{(n \cos\theta + m \sin\theta \cos\varphi)^2}{2}.$$

On déduira de suite de là le moment M de cette force centrifuge par rapport à OZ; on aura, en effet,

$$(2)\ldots\quad M = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = l^2 m \sin\theta \sin\varphi\,(n \cos\theta + m \sin\theta \cos\varphi).$$

Le travail de la force centrifuge composée est, comme on sait, toujours nul; nous nous bornerons donc à calculer son moment M_1 par rapport à OZ (car pour obtenir les équatións du mouvement, nous aurons recours au théorème des forces vives et à celui des moments de quantités de mouvement par rapport à OZ).

Or, les composantes de la force centrifuge composée étant, suivant OX,

$$2n\frac{dy}{dt},$$

suivant OY,

$$2m\frac{dz}{dt} - 2n\frac{dx}{dt},$$

on a, pour le moment M_1 de cette force par rapport à OZ,

$$M_1 = 2mx\frac{dz}{dt} - n\frac{d(x^2+y^2)}{dt},$$

ou, en passant aux coordonnées polaires,

$$M_1 = -2l^2 \sin\theta \frac{d\theta}{dt}(m\cos\varphi\sin\theta + n\cos\theta).$$

Supposons pour un instant que nous négligeons les causes perturbatrices secondaires et que nous considérons l'attraction de la terre comme constante en grandeur et en direction, quelle que soit la position occupée par le pendule dans son mouvement: la pesanteur résultant de la force centrifuge en O et de cette attraction constante sera également constante, et l'on aurait, par suite, pour les équations du mouvement déduites du théorème des forces vives et de celui des moments des quantités de mouvement par rapport à OZ,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) - (m\sin\theta\cos\varphi + n\cos\theta)^2 \\ &\qquad + (m\sin\theta_0\cos\varphi_0 + n\cos\theta_0)^2, \end{aligned}\right.$$

$$d\left(\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\right) = \left(m\sin\theta\sin\varphi - 2\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)(m\cos\varphi\sin\theta + n\cos\theta)\,dt,$$

ou, en intégrant la dernière et remarquant qu'à l'instant initial, pour $t = 0$, on a $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} &= n(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta) - 2m\int_{\theta_0}^{\theta} \sin^2\theta \cos\varphi \, d\theta \\ &+ m\int_0^t \sin\theta \sin\varphi (m\cos\varphi \sin\theta + n\cos\theta)\, dt. \end{aligned} \right.$$

2° *Des causes perturbatrices secondaires.* — Les causes perturbatrices qui agissent sur le pendule, en dehors de l'influence de la rotation de la terre, sont de deux sortes : 1° d'une part, les attractions de la lune, des astres, des masses de la mer déplacées par les marées, etc. ; 2° d'autre part, celle qui est due à la variation de l'attraction terrestre, en grandeur et en direction, lorsque le pendule se déplace dans son mouvement.

Ces forces perturbatrices sont toutes d'ordre $\beta\omega$, où β est un facteur qui peut être notablement plus grand que ω, mais qui reste quand même toujours une fraction assez faible.

Nous ferons voir, en effet, dans une note à la fin de ce mémoire, que, pour l'attraction de la lune, qui parmi les attractions secondaires est de beaucoup la plus considérable, ce facteur β est toujours très faible.

Ceci posé, nous désignerons dans tout ce qui va suivre *par pesanteur au point de suspension* O *du pendule, la résultante de l'attraction de la terre, de toutes les attractions secondaires perturbatrices et de la force centrifuge au point* O. C'est, en un mot, la résultante de la pesanteur au point O, telle que nous l'avions définie plus haut, et des attractions secondaires au même point.

Cette pesanteur ne sera, par suite, constante ni comme grandeur ni comme direction, puisque la résultante des forces perturbatrices est variable. Toutefois, comme ces forces sont d'ordre $\omega\beta$ et que leur variation est en majeure partie le résultat du mouvement de la terre, leur variation pendant le temps t sera d'ordre $\omega^2\beta t$. Si l'on considérait une journée sidérale entière, c'est-à-dire un temps $t = \frac{2\pi}{\omega}$, cette variation serait en effet d'ordre $\omega\beta$.

Si donc nous désignons par g l'intensité de la pesanteur au point O, telle que nous venons de la définir, pour un point de masse égale à 1, au commencement du mouvement que nous considérons, cette intensité à un instant quelconque sera égale à

$$g + \lambda\omega^2\beta,$$

λ désignant une fonction de t qui est nulle pour $t = 0$, et qui ne contient pas $\frac{1}{\omega}$ en facteur.

Soit maintenant OZ la direction de la verticale lorsqu'on néglige les forces perturbatrices (c'est-à-dire la résultante de l'attraction de la terre et de la force centrifuge au point O), OZ' la direction de la pesanteur au point O, telle que nous venons de la définir (résultante de l'attraction de la terre, de la force centrifuge et des forces perturbatrices au point O). Prenons un système de trois axes rectangulaire ox', oy', oz', l'axe des z ayant la direction oz' que nous venons d'indiquer, l'axe des x, ox' étant l'intersection du plan perpendiculaire à oz' avec le plan du méridien zox et l'axe des y, oy' étant perpendiculaire au plan $z'ox'$ et dirigé vers l'est, en nous supposant toujours placés dans l'hémisphère boréal.

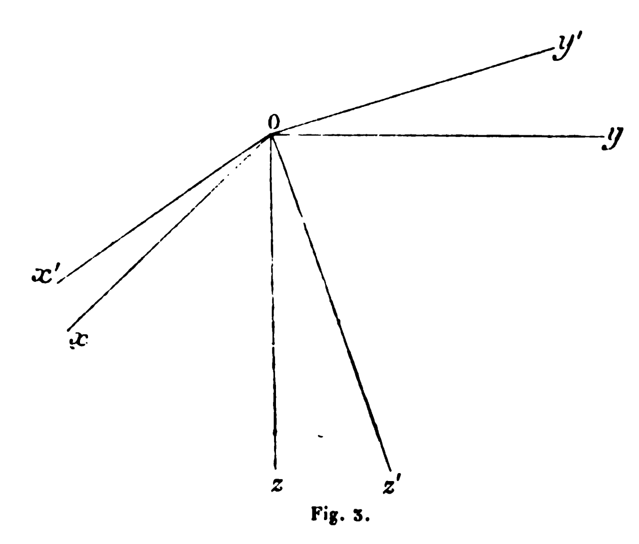


Fig. 3.

Le système ox', oy', oz' n'est pas fixe par rapport à la terre,

mais les angles de ox', oy', oz' avec ox, oy, oz étant de l'ordre de $\omega\beta$, leur variation pour le temps t sera de l'ordre de $\omega^2\beta t$, et par suite la rotation instantanée du système ox', oy', oz' aura une vitesse angulaire de l'ordre de $\omega^2\beta$.

Voyons maintenant l'influence qu'aura sur la force centrifuge et sur la force centrifuge composée la substitution du système $ox'y'z'$ au système $oxyz$.

Pour cela, remarquons que les composantes de la rotation totale du système $ox'y'z'$ par rapport aux axes ox', oy', oz' seront, aux termes en $\beta\omega^3$ près,

$$m + a_1\omega^2\beta, \quad b_1\omega^2\beta, \quad n + c_1\omega^2\beta,$$

où a_1, b_1, c_1 sont des quantités fonction de t, mais qui ne contiendront jamais $\frac{1}{\omega}$ en facteur.

Nous pourrons par suite, dans le calcul de la force centrifuge dû à la rotation du système $ox'y'z'$ autour du point O, négliger la rotation de $ox'y'z'$ par rapport à $oxyz$, car les composantes de la vitesse angulaire de la rotation autour du point O ne figurent dans la force centrifuge, due à la rotation autour de ce point, que par leurs carrés; on ne néglige donc que des termes en $\beta\omega^3$ en négligeant la rotation en question. Nous reconnaîtrons plus loin que les termes en ω^3 peuvent toujours être négligés.

Quant à la force centrifuge composée, son moment éprouvera, par suite de la rotation en question, une variation de l'ordre de $\omega^2\beta$.

On sait, en effet, que la force centrifuge composée correspondant à deux rotations composantes est la résultante des deux forces centrifuges composées correspondant aux deux rotations composantes considérées isolément, et à une rotation dont la vitesse angulaire est d'ordre $\omega^2\beta$ correspond évidemment une force centrifuge composée du même ordre.

Passons maintenant à l'étude des causes perturbatrices dues à la variation de l'intensité de l'attraction pendant le mouvement du pendule.

Nous supposerons la terre sphérique, car la non-sphéricité absolue de la terre ne pourrait influer que d'une façon complè-

tement insignifiante sur ses causes, déjà très petites par elles-mêmes.

Désignons par G l'intensité de l'attraction au point de suspension O du pendule, par ψ l'angle que fait le pendule avec le rayon de la terre passant par O, et par R le rayon terrestre OC.

Soit A la position du pendule à l'instant que l'on considère, l sa longueur.

Si nous négligeons les termes de l'ordre de $\frac{l^2}{R^2}$, l'intensité de l'attraction en A sera

$$G \frac{R^2}{(R - l\cos\psi)^2} = G\left(1 + \frac{2l}{R}\cos\psi\right).$$

Nous aurons ensuite pour la composante de l'attraction perpendiculaire à OC, aux termes en $\frac{l^2}{R^2}$ près,

$$G\frac{l\sin\psi}{R}.$$

Remarquons d'abord que l'on a sensiblement

$$\frac{1}{R} = 0{,}0022\,\omega = 30\,\omega^2$$

et

$$\frac{1}{R^2} = 0{,}063\,\omega^3,$$

Fig. 4.

de sorte que les termes en $\frac{1}{R^2}$ négligés sont sensiblement de l'ordre de ω^3.

Ceci posé, nous considérerons l'attraction sur l'unité de masse au point A comme étant la résultante :

1° De l'attraction G au point O;

2° De l'attraction $\frac{2Gl}{R}\cos\psi$ dirigée suivant OC ;

3° De l'attraction $\frac{Gl}{R}\sin\psi$ dirigée suivant la perpendiculaire AP à OC.

L'attraction G se composera avec la force centrifuge au point O et les attractions secondaires perturbatrices, pour produire ce que nous avons désigné par la pesanteur au point O, force dont la direction est OZ′ et l'intensité rapportée à l'unité de masse g.

Quant aux deux dernières forces, ce sont précisément celles que nous avons à introduire pour tenir compte de la variation de l'attraction de la terre.

On aura, pour le travail de ces deux forces,

$$-\int\frac{2Gl^2}{R}\cos\psi\sin\psi d\psi-\int\frac{Gl^2}{R}\sin\psi\cos\psi d\psi=\frac{3}{2}\frac{Gl^2}{R}(\cos^2\psi-\cos^2\psi_0).$$

Mais G diffère, comme on sait, de g par un terme au plus de l'ordre de ω^2R, et par suite $\frac{G}{R}$ diffère de $\frac{g}{R}$ par un terme au plus de l'ordre de ω^2; d'ailleurs l'angle θ de OA avec OZ′ diffère de l'angle ψ de OA avec OC d'un angle qui a sensiblement pour valeur maximum $\frac{\omega^2R}{2g}$. Cette valeur est, en effet, la valeur maximum de l'angle de OC avec OZ, et l'angle ZOZ′ est, lui, de l'ordre de $\beta\omega$, c'est-à-dire beaucoup plus petit. Donc, si l'on remplace ψ par θ et G par g dans l'expression

$$\frac{3}{2}\frac{Gl^2}{R}(\cos^2\psi-\cos^2\psi_0),$$

on fera éprouver à cette expression une variation au plus de l'ordre de ω^2.

Si nous cherchons maintenant les moments de ces deux dernières forces par rapport à OZ′, nous voyons :

1° Que le moment de la composante $\frac{2Gl}{R}\cos\psi$, parallèle à OC par rapport à OZ′, sera de l'ordre du produit de cette composante par l'angle de OC avec OZ′, c'est-à-dire, d'après ce que nous avons dit plus haut, au plus de l'ordre de

$$\frac{2G}{R}\cdot\frac{\omega^2R}{2g},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ω^2;

2° Que le moment de la composante $\frac{Gl}{R}\sin\psi$, perpendiculaire à OC, sera aussi au plus du même ordre, puisque la distance du point P à l'axe OZ′ est de l'ordre de l'angle Z′OC.

Remarquons, enfin, que la variation des forces perturbatrices secondaires, suivant la position que le pendule occupe pendant son mouvement, serait toujours d'ordre inférieur à ω^2, car ces forces sont d'ordre $\omega\beta$, et leur variation sera, par suite, d'ordre $\frac{\omega\beta}{\delta}$, δ étant la distance du pendule au centre d'attraction d'où provient la cause perturbatrice en question.

Donc, en résumé, pour tenir compte des causes perturbatrices secondaires, nous devons :

1° Remplacer le système de comparaison *oxyz* par le système de comparaison *ox′y′z′*;

2° Ajouter à l'équation (3) des forces vives, divisée par l^2, le terme

$$\frac{3}{2}\frac{g}{R}(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) = g\mu\omega(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0),$$

où

$$\mu = \frac{3}{2R\omega} = 0{,}0032 \text{ (*)}$$

et *un autre terme en* ω^2;

3° Ajouter à l'équation (4) des moments des quantités de mouvement *un terme en* ω^2.

Donc, si nous réunissons dans ces deux équations tous les termes qui contiennent ω^2 en facteur, aussi bien ceux dus à la force centrifuge correspondant à la rotation autour du point O, que ceux provenant des causes perturbatrices secondaires, dont nous venons de reconnaître l'existence, et si nous posons de plus

$$\frac{g}{l} = A^2,$$

(*) Dans les résultats finals nous négligerons les termes en $\mu\omega$, car leur influence sera complètement insignifiante par rapport à ceux en ω; mais il est préférable de les conserver encore pour l'instant.

nous pourrons écrire les équations du mouvement comme il suit :

$$(5)\quad \frac{d\theta^2}{dt^2}+\sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}=2A^2(\cos\theta-\cos\theta_0)\left[1+\mu\omega l(\cos\theta+\cos\theta_0)\right]+\omega^2F(t),$$

$$(6)\quad \sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}=n(\sin^2\theta_0-\sin^2\theta)-2m\int_{\theta_0}^{\theta}\sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta+\omega^2F_1(t),$$

$\omega^2F(t)$ représentant, ainsi que nous l'avons dit, l'ensemble des termes de ω^2 dans l'équation des forces vives, et $\omega^2F_1(t)$ l'ensemble des mêmes termes en ω^2 dans l'équation du moment des quantités de mouvement, quelle qu'en soit la provenance.

III

Intégration des équations du mouvement.

Nous nous proposons maintenant de calculer, aux termes en ω^2 près, la variation de l'azimut φ du pendule pendant la i^{me} demi-oscillation complète et la durée de cette i^{me} oscillation.

Remarquons d'ailleurs que nous supposons que i est un nombre peu considérable, de telle sorte que les termes en $i\omega$ restent de l'ordre de ω. En un mot, nous ne considérons qu'un nombre restreint d'oscillations, ce qui est d'ailleurs le seul cas qui puisse se présenter lorsqu'on suppose les amplitudes considérables. En éliminant $\frac{d\varphi}{dt}$ entre les équations (5) et (6), nous aurons :

$$(7)\quad \frac{d\theta^2}{dt^2}=2A^2(\cos\theta-\cos\theta_0)\left[1+\mu\omega l(\cos\theta+\cos\theta_0)\right]-\frac{\omega^2F_2(t)}{\sin^2\theta},$$

où

$$F_2(t)=\Big[\sin\lambda(\sin^2\theta_0-\sin^2\theta)-2\cos\lambda\int_{\theta_0}^{\theta}\sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta + \omega F_1(t)\Big]^2-\sin^2\theta F(t).$$

On pourra d'ailleurs écrire l'équation (6) :

$$(8) \quad d\varphi = -n dt + \frac{n \sin^2\theta_0 - 2m\int_{\theta_0}^{\theta} \sin^2\theta \cos\varphi d\theta + \omega^2 F_1(t)}{\sin^2\theta} dt.$$

Dans le mouvement du pendule de Foucault, le plan d'oscillation n'existe pas, à proprement parler, mais nous appellerons *plan d'oscillation* un plan qui tourne d'un mouvement uniforme, pendant la durée de chaque demi-oscillation complète (*) autour de la verticale, avec une vitesse angulaire de l'ordre de ω et de telle façon que le pendule se trouve dans ce plan au commencement et à la fin de chaque demi-oscillation complète.

Nous nous proposons maintenent, ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut, de déterminer la durée de la i^{me} demi-oscillation complète, ainsi que la variation de φ, et plus particulièrement la rotation du plan d'oscillation (défini plus haut) pendant cette i^{me} demi-oscillation, toujours aux termes en ω^2 près.

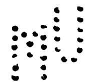
Cherchons donc quels sont les termes qu'il faudra conserver dans $d\varphi$ pour obtenir φ avec l'approximation demandée.

D'abord, pour toutes les valeurs de θ qui ne sont pas très petites de l'ordre de ω, nous pouvons négliger partout les termes en ω^2, puisque pour ces valeurs, les intégrales ne présentant pas le caractère d'intégrales singulières, la variation sera de l'ordre des termes négligés.

Supposons maintenant θ très petit de l'ordre de ω; nous devrons alors, dans les termes de l'expression de $d\varphi$ qui ont $\sin^2\theta$ en dénominateur, calculer les numérateurs aux termes en ω^3 près.

En effet, pour les valeurs de θ très petites de l'ordre de ω, ces termes en ω^3, divisés par $\sin^2\theta$, qui est de l'ordre de ω^2, donneront dans l'intégrale des éléments qui contiendront ω en facteur, et comme d'ailleurs l'intervalle des limites qui correspondent aux valeurs de θ, très petites de l'ordre de ω, est lui-même de

(*) Nous entendons par oscillation complète le mouvement du pendule aller et retour.



l'ordre de ω (*), la portion correspondante de l'intégrale sera au plus de l'ordre de ω^2, et elle n'influera pas, par suite, sur les termes en ω que nous voulons obtenir.

Considérons maintenant l'intégrale

$$m\int_0^\theta \sin^2\theta \cos\varphi \, d\theta;$$

je dis qu'aux termes en ω^2 près on peut la remplacer par la suivante :

$$(9) \quad m\int_{\theta_0}^{\theta'} \cos\varphi_0 \sin^2\theta' d\theta' = m\cos\varphi_0 \frac{\theta' - \sin\theta'\cos\theta' - \theta_0 + \sin\theta_0\cos\theta_0}{2},$$

où θ′ désigne la projection de l'angle θ sur le plan d'oscillation, tel que nous l'avons défini plus haut, projection considérée

---

(*) Désignons par θ_i la valeur minimum de θ pendant la i^{me} demi-oscillation et par T_i la valeur correspondante de t; comme $\frac{d\theta}{dt}$ est nul pour $\theta = \theta_i$, il semble à première vue que l'intervalle des limites $t - T_i$ qui correspond aux valeurs de θ très petites de l'ordre de ω soit de l'ordre de $\sqrt{\theta - \theta_i}$ et par suite de l'ordre de $\omega^{\frac{1}{2}}$, mais on peut voir de la manière suivante que cet intervalle est bien de l'ordre de ω. Désignons par $l^2\Theta$ la somme des moments des forces par rapport à un axe perpendiculaire au plan vertical passant par le pendule; nous aurons, en prenant l'équation en θ de Lagrange et divisant par l^2,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \Theta,$$

d'où

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \Theta.$$

Mais, en vertu de l'équation (8), $\frac{d\varphi}{dt}$ est, pour $\theta = \theta_i$, de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$; il en résulte que $\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}$ est également de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$. Donc, comme pour $\theta = \theta_i$, on a $\frac{d\theta}{dt} = 0$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{K}{\omega}$, K ne contenant pas ω en facteur et étant différent de zéro. On aura par suite

$$\theta - \theta_i = \frac{K}{2\omega}(t - T)^2 P(t),$$

$P(t)$ étant une fonction qui pour $t = T_i$ se réduit à l'unité. On déduira de là

$$t - T_i = \sqrt{\omega(\theta - \theta_i)}\sqrt{\frac{2}{KP(t)}},$$

formule qui fait bien voir que si $\theta - \theta_i$ est de l'ordre de ω, $t - T_i$ sera également de l'ordre de ω.

comme positive d'un côté de la verticale et comme négative de l'autre, de telle sorte que, pendant une demi-oscillation complète, lorsque θ décroît de θ_0 à sa valeur minimum et croît ensuite de cette valeur minimum à θ_0, θ' décroît constamment de θ_0 à $-\theta_0$ ou croît constamment de $-\theta_0$ à θ_0, suivant le sens de la demi-oscillation complète que l'on considère.

En effet, si nous considérons d'abord le premier quart d'oscillation, tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω, φ diffère de φ_0 par un terme de l'ordre de ω, ainsi que cela résulte immédiatement de la valeur (8) de $d\varphi$ (valeur qui contient ω en facteur tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω), et, par suite, θ diffère de θ' par un terme de l'ordre de ω^2 (*), de sorte que tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω, on a bien, pendant le premier quart d'oscillation, aux termes en ω^2 près,

$$m \cos\varphi \sin^2\theta = m \cos\varphi_0 \sin^2\theta'.$$

Mais lorsque θ est très petit de l'ordre de ω, les deux membres de l'équation précédente étant tous deux de l'ordre de ω^3, il en sera de même de leur différence, et par suite la relation

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad m \cos\varphi \sin^2\theta d\theta = m \cos\varphi_0 \sin^2\theta' d\theta'$$

se trouve être exacte, aux termes en ω^2 près, pour tout le premier quart d'oscillation complète.

Mais elle se trouve par là aussi démontrée pour le quart d'oscillation suivant.

En effet, dès que θ a dépassé sa valeur minima, $d\theta$ se trouve avoir changé de signe (il était négatif pendant le premier quart d'oscillation, il devient positif pendant le second). D'autre part, nous n'avons pas, ainsi que nous l'avons dit, à tenir compte des valeurs de θ très petites de l'ordre de ω, puisque alors $m \sin^2\theta$ et

(*) En effet, si l'on désigne par γ la vitesse de rotation du plan d'oscillation, on a

$$\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\theta \cos(\varphi - \varphi_0 - \gamma t).$$

Or, γ est de l'ordre de ω, et il en est de même de $\varphi - \varphi_0$ tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω, ce que nous supposons.

$m \sin^2\theta'$ sont tous deux de l'ordre de ω^3; or, pendant le deuxième quart d'oscillation, dès que θ n'est plus très petit de l'ordre de ω, φ diffère seulement par un terme en ω de $\pi + \varphi_0$, de sorte qu'aux termes en ω près, $\cos\varphi$ ayant changé seulement de signe, comme $d\theta$, $\cos\varphi d\theta$ se trouve avoir conservé, comme $d\theta'$, le même signe que pendant le premier quart d'oscillation. Donc, aux termes en ω^2 près, les deux membres de la relation (10) reprennent, pendant le second quart d'oscillation, les mêmes valeurs que pendant le premier, et cette relation est également exacte pour le second quart d'oscillation. On verrait d'une façon toute semblable qu'elle s'applique pendant toute la durée du mouvement (en supposant, ainsi que nous l'avons fait, que l'on ne considère qu'un nombre assez restreint d'oscillations pour que les termes en ωt restent toujours effectivement de l'ordre de ω).

Si nous posons donc maintenant

$$f(\theta') = \cos\varphi_0 (\theta' - \sin\theta' \cos\theta'),$$

nous aurons

$$(11) \quad 2m\int_{\theta_0}^{\theta} \cos\varphi \sin^2\theta d\theta - \omega^2 F_1(t) = m\left[f(\theta') - f(\theta_0)\right] - \omega^2 F_3(t),$$

en réunissant dans $\omega^2 F_3(t)$ tous les termes en ω^2, aussi bien ceux qui proviennent de $\omega^2 F_1(t)$ que de la différence, d'ordre ω^2, entre les deux membres de l'équation (10). En tenant compte de cette relation (11), l'équation (8) devient

$$(12) \quad d\varphi = -ndt + \frac{n\sin^2\theta_0 + m\left[f(\theta_0) - f(\theta')\right] + \omega^2 F_3(t)}{\sin^2\theta} dt;$$

on tirera d'ailleurs de l'équation (7)

$$(13) \quad dt = \frac{d\theta}{A\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \dfrac{\omega^2 F_2(t)}{2A^2\sin^2\theta}}},$$

la valeur de $F_2(t)$ devenant d'autre part, si l'on tient compte de la relation (11),

$$F_2(t) = \left[\sin\lambda(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta) + \cos\lambda\left[f(\theta_0) - f(\theta')\right] + \omega F_3(t)\right]^2 - \sin^2\theta F(t).$$

Si maintenant nous désignons, comme plus haut, par θ_i la valeur minimum de θ pendant la i^{me} demi-oscillation complète et par T_i la valeur correspondante de t, $\frac{d\theta}{dt}$ devra être égal à zéro pour cette valeur T_i de t, puisque θ_i est un minimum de θ. On aura donc

$$(14)\quad (\cos\theta_i - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta_i + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2 F_2(T_i)}{2A^2\sin^2\theta^i} = 0.$$

Nous remarquerons ensuite que l'on peut poser

$$F_2(t) = F_2(T_i) + (\cos\theta_i - \cos\theta)\,\chi(t),$$

$\chi(t)$ étant une fonction qui est finie pour $\theta = \theta_i$ et qui, de plus, ne contient pas $\frac{1}{\omega}$ en facteur.

Nous devons d'abord faire voir que l'expression

$$(15)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad \chi(t) = \frac{F_2(t) - F_2(T_i)}{\cos\theta_i - \cos\theta}$$

est finie pour $\theta = \theta_i$.

Si en effet on prend le rapport des dérivées des deux termes de cette fraction, on a

$$\frac{F_2'(t)}{\sin\theta}\,\frac{dt}{d\theta};$$

$\frac{dt}{d\theta}$ est infini pour $\theta = \theta_i$, mais le produit

$$F_2'(t)\,\frac{dt}{d\theta}$$

est fini. On a en effet, en différentiant l'équation (7),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} = A^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2 F_2(t)}{2A^2\sin^2\theta}\right] \\ - \frac{\omega^2 F_2'(t)}{\sin^2\theta}\,\frac{dt}{d\theta}. \end{aligned}\right.$$

Or, si Θl^2 désigne la somme des moments des forces par rapport à un axe perpendiculaire au plan vertical où se trouve le pen-

dule à l'instant que l'on considère, on déduit des équations de Lagrange (*)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \Theta + \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2};$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est donc fini et différent de zéro pour $\theta = \theta_i$, le premier terme du second membre de l'équation (16) étant également fini pour $\theta = \theta_i$; il en sera forcément de même de

$$F_2'(t)\frac{dt}{d\theta}.$$

L'expression (15) est donc bien finie pour $\theta = \theta_i$.

Reste à faire voir qu'elle ne contient pas ω en facteur.

Ce fait résulte immédiatement de ce que l'on peut écrire

$$F_2(t) = \left[\sin\lambda(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta) + \cos\lambda[f(\theta_0) - f(\theta')] + \omega F_3(T_i) + \omega(t - T_i)R(t)\right]^2 - \sin^2\theta F(t).$$

Mais pour θ très petit de l'ordre de ω, $(t - T_i)$ est aussi de l'ordre de ω (**); on pourra donc poser

$$\omega(t - T_i)R(t) = \omega^2 S(t),$$

$S(t)$ étant une fonction qui ne contient pas $\frac{1}{\omega}$ en facteur, et on aura, par suite,

$$(17)\quad \begin{cases} F_2(t) = \left[\sin\lambda(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta) + \cos\lambda[f(\theta_0) - f(\theta)] \right. \\ \left. \qquad + \omega F_3(T_i) + \omega^2 S(t)\right]^2 - \sin^2\theta F(t). \end{cases}$$

Cette expression fait voir que la différence

$$F_2(t) - F_2'(T_i)$$

contient ω^2 en facteur. En effet, si dans l'expression (17) de $F_2(t)$,

---

(*) Ainsi que nous l'avons fait voir plus haut, dans une note.

(**) Nous avons établi ce fait plus haut, dans une note à la page 16.

où l'on suppose θ très petit de l'ordre de ω, on néglige les termes en ω^2, elle se réduit à

$$(17') \quad (\sin\lambda \sin^2\theta_0 + \cos\lambda\, f(\theta_0) + \omega F_3(T_i))^2 = F_2(t) = F_2(T_i),$$

expression qui est aussi la valeur de $F_2(T_i)$, lorsqu'on y néglige les termes en ω^2.

Dans l'expression (15) de $\chi(t)$, le numérateur contenant, pour θ très petit de l'ordre de ω, ω^2 en facteur comme le dénominateur, $\chi(t)$ ne contiendra pas $\frac{1}{\omega}$ en facteur pour θ très petit de l'ordre de ω. (Il est d'ailleurs évident que si θ n'est pas très petit de ω, $\chi(t)$ ne peut contenir $\frac{1}{\omega}$ en facteur, puisque alors son dénominateur ne contient plus ω en facteur.)

Si nous remplaçons maintenant $F_2(t)$ par sa valeur déduite de l'équation (15), nous aurons sous le radical, dans l'expression de *dt*,

$$(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2 F_2(t)}{2A^2\sin^2\theta}$$

$$= (\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2 F_2(T_i)}{2A^2\sin^2\theta}$$

$$- (\cos\theta_i - \cos\theta)\frac{\omega^2\chi(t)}{2A^2\sin^2\theta}.$$

Mais l'équation

$$(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2 F_2(T_i)}{2A^2\sin^2\theta} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, l'équation entière en cos θ

$$(1 - \cos^2\theta)(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2}{2A^2}F_2(T_i) = 0$$

admet d'abord, en vertu de l'équation (14), une racine égale à $\cos\theta_i$; elle admettra de plus une racine différant par un terme en ω^2 de $\cos\theta_0$, une différant par un terme en ω^2 de -1, et enfin une différant par un terme en ω^2 de $-\frac{1}{\mu\omega l} - \cos\theta_0$; de

sorte qu'en désignant par η_1, η_2, η_3 des termes qui contiennent ω^2 en facteur, nous pourrons poser (*)

$$(1 - \cos^2\theta)(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right] - \frac{\omega^2}{2A^2} F_2(T_i)$$

$$= (\cos\theta_i - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_0 - \eta_1)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0 + \eta_2)\right](1 + \cos\theta + \eta_3),$$

et nous aurons alors, en multipliant haut et bas par sin θ dans l'expression (13) de dt,

$$dt = \frac{d\cos\theta}{A\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta_i - \cos\theta)\left[(\cos\theta - \cos\theta_0 - \eta_1)[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0 + \eta_2)](1 + \cos\theta + \eta_3) - \frac{\omega^2}{2A^2}\chi(t)\right]}},$$

ce que nous pourrons écrire

$$dt = \frac{d\cos\theta}{A\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta_i - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_0 - \eta_1)}}$$

$$\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0 + \eta_2)\right]^{-\frac{1}{2}}(1 + \cos\theta + \eta_3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[1 - \frac{\omega^2\chi(t)}{2A^2(\cos\theta - \cos\theta_0 - \eta_1)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0 + \eta_2)\right](1 + \cos\theta + \eta_3)}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit, nous pouvons négliger partout les termes en ω^2 tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω (**); de plus, si nous considérons les valeurs de θ très

(*) On trouve facilement pour η_1, η_2, η_3, aux termes en ω^4 près, en remarquant d'ailleurs que cos θ_i ne diffère de 1 que par un terme en ω^2,

$$\eta_1 = \frac{\omega^2 F_2(T_i)}{2A^2\sin^2\theta_0(1 + 2\mu\omega l\cos\theta_0)}, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = \frac{\omega^2 F_2(T_i)}{4A^2(1 + \cos\theta_0)[1 - \mu\omega l(1 - \cos\theta_0)]}.$$

Nous verrons d'ailleurs que ces termes η_1, η_2, η_3 ne pouvant donner naissance qu'à des termes en ω^2, il n'y aura pas à en tenir compte dans les résultats finals.

(**) On pourrait objecter peut-être à ce sujet que dans le dernier facteur le terme qui a $\omega^2\chi(t)$ pour numérateur devient infini pour cos ' $_0$ + η_1 ; mais il faut remarquer que les intégrales devraient être prises non pas jusqu'à cos θ = cos θ_0 + η_1, mais bien jusqu'à la valeur de cos θ qui rend le dernier facteur nul; or, la valeur de cos θ, voisine de cos θ_0 qui annule ce dernier facteur, diffère, ainsi qu'on le voit de suite, de cos θ_0 par un terme de l'ordre de ω^2, de telle sorte qu'il en résulterait pour les limites des intégrations une variation de l'ordre de ω^2 et par suite pour les intégrales elles-mêmes une variation du même ordre.

petites de l'ordre de ω, nous voyons d'abord que, dans le calcul de t, les termes η_2, η_3 et $\omega^2\chi(t)$ ne pourraient introduire dans le résultat final que des termes en ω^2; on peut donc les négliger dans le calcul de t.

On pourra, d'ailleurs, les négliger également dans le calcul de φ; en effet, lorsqu'on remplacera dt par sa valeur dans l'expression de $d\varphi$, cette expression contenant partout ω en facteur au numérateur, ces termes η_2, η_3 et $\omega^2\chi(t)$, qui contiennent tous ω^2 en facteur, ne donneront au numérateur de $d\varphi$ que des termes en ω^3, termes dont il n'y a pas lieu de tenir compte, ainsi que nous l'avons vu.

Nous pourrons également négliger le terme η_1, car cela revient à faire varier cos θ_0 d'une quantité de l'ordre de ω^2, et il sera bien facile de voir sur les formules auxquelles nous arriverons qu'une variation de l'ordre de ω^2 sur cos θ_0 ne produirait qu'une variation du même ordre sur les résultats finals, variation qui est par suite négligeable. On pourrait, d'ailleurs, dire aussi que négliger η_1 revient à augmenter $\omega^2\chi(t)$ de la quantité

$$\eta_1\left[1+\mu\omega l(\cos\theta+\cos\theta_0+\eta_2)\right](1+\cos\theta+\eta_3)$$

qui, contenant ω^2 en facteur, permettra de négliger $\omega^2\chi(t)$ aussi bien après.

Je dis enfin que, si nous nous proposons de calculer la variation totale de φ pendant la i^{me} demi-oscillation complète, nous pourrons dans le calcul de φ négliger l'intégrale

$$(18).\quad . \quad m\int\frac{f(\theta')}{\sin^2\theta}\,dt = m\cos\varphi_0\int\frac{\theta'-\sin\theta'\cos\theta'}{\sin^2\theta}dt,$$

car cette intégrale, étendue à toute la durée de la demi-oscillation complète que nous considérons, est nulle, tout au moins aux termes en ω^3 près.

Remarquons d'abord que cette intégrale n'est pas une intégrale singulière, puisque, pour θ très petit de l'ordre de ω, le numérateur est de l'ordre de ω^4 et le dénominateur seulement de l'ordre de ω^2; il résulte aussi de là que la somme des éléments

de l'intégrale correspondant à des valeurs de θ très petites de l'ordre de ω est au plus de l'ordre ω^3. Si maintenant on considère deux éléments de cette intégrale correspondant à des valeurs de θ' égales et de signes contraires, et qui ne sont pas très petites de l'ordre de ω, θ différera en valeur absolue de θ' par un terme de l'ordre de ω^2, ainsi que nous l'avons vu, et par suite $\frac{m}{\sin^2\theta}$ aura, pour ces deux éléments, la même valeur aux termes en ω^3 près; de telle sorte que, aux termes en ω^3 près, les éléments de l'intégrale, étendue à toute la demi-oscillation, se détruisent deux à deux, et que, par suite, cette intégrale est nulle.

Nous pourrons donc pour le calcul, aux termes en ω^2 près, du temps de la i^{me} demi-oscillation complète et la variation de φ pendant cette demi-oscillation, prendre

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} dt &= \frac{d\cos\theta}{A\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta_i - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_0)}}(1+\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[1 - \frac{\mu\omega l}{2}(\cos\theta + \cos\theta_0)\right], \end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} d\varphi &= -n dt + \frac{q}{\sin^2\theta}(1+\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[1 - \frac{\mu\omega l}{2}(\cos\theta + \cos\theta_0)\right]\frac{d\cos\theta}{A\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta_i - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \end{aligned}\right.$$

avec

$$(21)\quad \ldots\ldots \quad q = n\sin^2\theta_0 + mf(\theta_0) + \omega^2 F_3(T_i).$$

En effet, nous pouvons d'abord nous borner aux deux premiers termes dans le développement de

$$\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta + \cos\theta_0)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

puisque nous pouvons négliger les termes en ω^2 dans dt et ceux en ω^3 dans le numérateur de $d\varphi$, q contenant d'ailleurs ω en facteur.

Ensuite, si nous nous reportons à l'expression (12) de

$$d\varphi = -\,n dt + \frac{n \sin^2\theta_0 + m\,[f(\theta_0) - f(\theta')] + \omega^2 F_3(t)}{\sin^2\theta} dt,$$

nous pourrons d'abord négliger le terme $mf(\theta')$, puisque l'intégrale (18) étendue à toute la demi-oscillation, est nulle aux termes en ω^3 près ; nous aurons ensuite, ainsi que nous l'avons déjà remarqué,

$$\omega^2 F_3(t) = \omega^2 F_3(T_i) + \omega^3 S(t),$$

$S(t)$ ne contenant pas $\frac{1}{\omega}$ en facteur.

Mais le terme $\omega^3 S(t)$ pourra être négligé, d'après ce que nous avons dit, de sorte qu'il reste bien, en fin de compte, pour $d\varphi$ l'expression (20) avec la valeur (21) de q.

Nous poserons maintenant

$$1 - \cos\theta = x, \quad 1 - \cos\theta_0 = a, \quad 1 - \cos\theta_i = \varepsilon,$$

d'où

$$1 + \cos\theta = 2\left(1 - \frac{x}{2}\right), \quad \cos\theta + \cos\theta_0 = 2\left(1 - \frac{x+a}{2}\right).$$

$$\sin^2\theta = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Il viendra par suite

$$(22)\quad \begin{cases} dt = -\dfrac{1}{2A}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \mu\omega l\left(1 - \dfrac{a}{2}\right)\right]\dfrac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}} \\ \qquad - \dfrac{1}{2A}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\mu\omega l x}{2}\dfrac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}}, \end{cases}$$

$$d\varphi = -\,n dt - \frac{q}{4A}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}}$$

$$+ \frac{q\mu\omega l}{4A}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\left(1 - \frac{x+a}{2}\right)dx}{x\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}}.$$

Mais nous remarquerons que dans l'expression de φ l'intégrale

$$\frac{q\mu\omega l}{4A}\int\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{x+a}{2}\right)dx}{x\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}}$$

est une intégrale singulière, et comme q contient ω en facteur, son numérateur contient ω^2 en facteur; donc, comme nous négligeons les termes en ω^2 dans les résultats finals, seuls les éléments qui correspondent à θ très petit de l'ordre de ω entreront en ligne de compte, puisque seuls ils pourront donner naissance à des termes de l'ordre de ω.

Nous pourrons donc substituer à cette intégrale la suivante :

$$\frac{q\mu\omega l}{4A}\left(1-\frac{a}{2}\right)\int\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}dx}{x\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}},$$

de sorte que nous pourrons prendre

$$(23)\quad d\varphi=-ndt+\frac{q}{4A}\left[1-\mu\omega l\left(1-\frac{a}{2}\right)\right]\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}dx}{x\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}}.$$

Nous aurons d'ailleurs, par la formule du binôme,

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots$$

$$\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\cdots+\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+\cdots$$

De sorte que nous avons à calculer, aux termes en ω^2 près, les trois intégrales suivantes, étendues à toute la i^{me} demi-oscillation :

$$I_1 = \int \frac{-dx}{\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \cdots\right],$$

$$I_2 = \int \frac{-dx}{\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}} \left[x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1.3..(2n-1)}{2.4\ldots 2n} 2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \cdots\right],$$

$$I_3 = \int \frac{-dx}{\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}} \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots + \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + \cdots\right].$$

Posons maintenant

$$x = \varepsilon \cos^2 u + a \sin^2 u,$$

u variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ pendant la i^e demi-oscillation complète que nous considérons.

Nous aurons alors, x décroissant d'abord de a à ε pour croître ensuite de ε à a,

$$\frac{\mp dx}{\sqrt{(a-x)(x-\varepsilon)}} = 2du,$$

et nous aurons, par suite,

$$I_1 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u}{2} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1\,.\,3\,..\,(2n-1)}{2\,.\,4\,..\,2n}\left(\frac{\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u}{2}\right)^n + \cdots\right] du,$$

$$I_2 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u) + \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u)^2}{2} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots 2n} 2\left(\frac{\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u}{2}\right)^{n+1} + \cdots\right] du,$$

$$I_3 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{du}{\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{3\,.\,5\ldots(2n+1)}{2\,.\,4\,..\,2n}\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u}{2}\right)^{n-1} + \cdots\right] du.$$

Mais si nous négligeons, comme nous en sommes convenus, les termes en ω^2 dans les résultats finals, comme $\varepsilon = 1 - \cos\theta_i$ contient ω^2 en facteur, nous pourrons négliger les termes en ε partout où cette quantité figure *seulement au numérateur*, c'est-à-dire dans tous les termes des trois intégrales, *sauf dans le premier terme de* I_3 (*). En remarquant, de plus, que les intégrales prises de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ sont le double des mêmes intégrales prises de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et posant

$$\frac{a}{2} = \frac{1 - \cos\theta_0}{2} = \sin^2\frac{\theta_0}{2} = k^2,$$

d'où, par suite,

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

avec

$$1 - \frac{a}{2} = \cos^2\frac{\theta_0}{2} = k'^2,$$

nous aurons

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin^2 u + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}\sin^{2n}u + \cdots\right]du,$$

$$I_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2k^2\sin^2 u + \frac{1}{2}\cdot 2k^4\sin^4 u + \cdot\right.$$
$$\left. + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}2k^{2n+2}\sin^{2n+2}u + \cdots\right]du,$$

$$I_3 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\varepsilon\cos^2 u + a\sin^2 u} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{2}k^{2n-2}\sin^{2n-2}u + \cdots\right]du.$$

(*) On voit que si l'on négligeait ε dans le premier terme de I_3, ce terme deviendrait infini, car il se réduirait à

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{a\sin^2 u}.$$

Mais on a

$$\int \frac{du}{\varepsilon \cos^2 u + a \sin^2 u} = \int \frac{d \,\mathrm{tg}\, u}{\varepsilon + a \,\mathrm{tg}^2 u} = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\, u\right)}{1 + \frac{a}{\varepsilon}\,\mathrm{tg}^2 u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\, u\right),$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\varepsilon \cos^2 u + a \sin^2 u} = \frac{\pi}{2\sqrt{a\varepsilon}},$$

et comme d'ailleurs on a aussi, en vertu d'une formule bien connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u\, du = \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose

$$(24) \quad H = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \cdots + \left(\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots$$

$$(25) \quad S = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \cdots + \frac{2n+1}{n+1}\left[\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \cdots$$

$$(26) \quad G = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4^2-1}{4} k^2 + \cdots + \left(\frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n-2)}\right)^2 \frac{4n^2-1}{2n} k^{2n-2} + \cdots$$

nous aurons

$$I_1 = 2H\pi, \quad I_2 = 2k^2\pi S, \quad I_3 = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{a\varepsilon}} + G\right).$$

Comme, d'ailleurs, les formules (22) et (23), en désignant par 2T le temps de la demi-oscillation que nous considérons et par Φ la variation de φ pendant cette oscillation, donnent

$$2T = \frac{1 - \mu\omega l k'^2}{2A} I_1 + \frac{\mu\omega l}{4A} I_2,$$

$$\Phi = -2nT + q\frac{(1 - \mu\omega l k'^2)}{4A} I_3,$$

nous aurons, en remarquant que $q\omega$ est de l'ordre de ω^2 et que nous ne devons, par suite, conserver ce terme que là où il est multiplié par un terme en $\frac{1}{\omega}$,

$$(27) \quad \ldots \quad T = (1 - \mu\omega l k'^2)\frac{\pi H}{2A} + \frac{\mu\omega l k^2}{4A}\pi S,$$

$$(28) \quad \ldots \quad \Phi = -2nT + \frac{q(1 - \mu\omega l k'^2)}{2A}\frac{\pi}{\sqrt{a\varepsilon}} + \frac{qG\pi}{4A}.$$

Il nous reste maintenant à calculer

$$\frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos\theta_0)(1 - \cos\theta_i)}},$$

et comme cette expression est multipliée par q, qui est de l'ordre de ω, il nous suffira de l'obtenir aux termes en ω près. Nous devrons pour cela, trouver l'expression de $\sqrt{1 - \cos\theta_i}$ aux termes en ω^2 près; car si l'on a

$$\sqrt{1 - \cos\theta_i} = a\omega(1 + a_1\omega + \cdots),$$

on en déduira

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos\theta_i}} = \frac{1}{a\omega}\frac{1}{1 + a_1\omega + \cdots} = \frac{1}{a\omega} - \frac{a_1}{a} + \cdots$$

Calculons donc $\sqrt{1 - \cos\theta_i}$ aux termes en ω^3 près; reportons-nous pour cela à l'équation (14), que nous écrirons

$$2A^2\sin^2\theta_i(\cos\theta_i - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta_i + \cos\theta_0)\right] - \omega^2 F_2(T_i) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{1 - \cos\theta_i} = \frac{\omega\sqrt{F_2(T_i)}}{A\sqrt{2(1 + \cos\theta_i)(\cos\theta_i - \cos\theta_0)[1 + \mu\omega l(\cos\theta_i + \cos\theta_0)]}},$$

expression que nous devrons calculer aux termes en ω^3 près. Mais ω étant en facteur au numérateur, il en résulte que nous devrons calculer les radicaux aux termes en ω^2 près.

Mais on a

$$\int \frac{du}{\varepsilon \cos^2 u + a \sin^2 u} = \int \frac{d \operatorname{tg} u}{\varepsilon + a \operatorname{tg}^2 u} = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \operatorname{tg} u\right)}{1 + \frac{a}{\varepsilon} \operatorname{tg}^2 u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \operatorname{tg} u\right),$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\varepsilon \cos^2 u + a \sin^2 u} = \frac{\pi}{2\sqrt{a\varepsilon}},$$

et comme d'ailleurs on a aussi, en vertu d'une formule bien connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u\, du = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose

$$(24) \quad H = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots$$

$$(25) \quad S = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \cdots + \frac{2n+1}{n+1}\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \cdots$$

$$(26) \quad G = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4^2-1}{4} k^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right)^2 \frac{4n^2-1}{2n} k^{2n-2} + \cdots$$

nous aurons

$$I_1 = 2H\pi, \quad I_2 = 2k^2\pi S, \quad I_3 = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{a\varepsilon}} + G\right).$$

Comme, d'ailleurs, les formules (22) et (23), en désignant par 2T le temps de la demi-oscillation que nous considérons et par Φ la variation de φ pendant cette oscillation, donnent

$$2T = \frac{1 - \mu\omega l k'^2}{2A} I_1 + \frac{\mu\omega l}{4A} I_2,$$

$$\Phi = -2nT + q\frac{(1 - \mu\omega l k'^2)}{4A} I_3,$$

nous aurons, en remarquant que $q\omega$ est de l'ordre de ω^2 et que nous ne devons, par suite, conserver ce terme que là où il est multiplié par un terme en $\frac{1}{\omega}$,

$$(27) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T = (1 - \mu\omega l k'^2)\frac{\pi H}{2A} + \frac{\mu\omega l k^2}{4A}\pi S,$$

$$(28). \quad . \quad . \quad \Phi = -2nT + \frac{q(1 - \mu\omega l k'^2)}{2A}\frac{\pi}{\sqrt{a\varepsilon}} + \frac{qG\pi}{4A}.$$

Il nous reste maintenant à calculer

$$\frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos\theta_0)(1 - \cos\theta_i)}},$$

et comme cette expression est multipliée par q, qui est de l'ordre de ω, il nous suffira de l'obtenir aux termes en ω près. Nous devrons pour cela, trouver l'expression de $\sqrt{1 - \cos\theta_i}$ aux termes en ω^2 près; car si l'on a

$$\sqrt{1 - \cos\theta_i} = a\omega(1 + a_1\omega + \cdots),$$

on en déduira

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos\theta_i}} = \frac{1}{a\omega}\frac{1}{1 + a_1\omega + \cdots} = \frac{1}{a\omega} - \frac{a_1}{a} + \cdots$$

Calculons donc $\sqrt{1 - \cos\theta_i}$ aux termes en ω^3 près; reportons-nous pour cela à l'équation (14), que nous écrirons

$$2A^2\sin^2\theta_i(\cos\theta_i - \cos\theta_0)\left[1 + \mu\omega l(\cos\theta_i + \cos\theta_0)\right] - \omega^2 F_2(T_i) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{1 - \cos\theta_i} = \frac{\omega\sqrt{F_2(T_i)}}{A\sqrt{2(1 + \cos\theta_i)(\cos\theta_i - \cos\theta_0)[1 + \mu\omega l(\cos\theta_i + \cos\theta_0)]}},$$

expression que nous devrons calculer aux termes en ω^3 près. Mais ω étant en facteur au numérateur, il en résulte que nous devrons calculer les radicaux aux termes en ω^2 près.

Or lorsqu'on néglige les termes en ω^2, on a, en vertu de l'équation (17′),

$$\sqrt{F_2(T_i)} = \sin\lambda \sin^2\theta_0 + \cos\lambda f(\theta_0) + \omega F_3(T_i),$$

d'où, en vertu de la relation (21),

$$\omega\sqrt{F_2(T_i)} = q.$$

Nous aurons ensuite, aux termes en ω^2 près,

$$\frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\theta_i)(\cos\theta_i - \cos\theta_0)\left[1+\mu\omega l(\cos\theta_i + \cos\theta_0)\right]}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\cos\theta_0}}\left[1 - \frac{\mu\omega l}{2}(1+\cos\theta_0)\right],$$

et, par suite,

$$\sqrt{(1-\cos\theta_i)(1-\cos\theta_0)} = \frac{q}{2A}\left[1 - \frac{\mu\omega l}{2}(1+\cos\theta_0)\right] = \frac{q}{2A}(1-\mu\omega l k'^2),$$

de sorte que l'on a

$$\frac{q(1-\mu\omega l k'^2)}{2A\sqrt{a\varepsilon}} = 1,$$

et, par suite,

$$\Phi = -2nT + \pi + \frac{qG\pi}{4A},$$

et nous aurons par suite, pour l'angle dont a tourné le plan d'oscillation pendant la i^e demi-oscillation complète,

$$-2nT + \frac{qG\pi}{4A}.$$

Comme, d'ailleurs, la durée de cette demi-oscillation est 2T, nous aurons pour la vitesse de rotation du plan d'oscillation

$$\frac{d\tau}{dt} = -n + \frac{qG\pi}{8AT}.$$

Mais comme nous négligeons les termes en ω^2 dans le résultat final et que q contient ω en facteur, nous devrons négliger les termes en ω dans T et négliger aussi ceux en ω^2 dans q, de sorte que nous devrons prendre

$$T = \frac{\tau H}{2A}, \quad q = n \sin^2\theta_0 + mf(\theta_0),$$

où l'on a, d'ailleurs,

$$f(\theta_0) = \cos\varphi_0 (\theta_0 - \sin\theta_0 \cos\theta_0).$$

De sorte qu'il viendra, en définitive,

$$(29) \qquad \frac{d\tau}{dt} = -n + \frac{n \sin^2\theta_0 + m \cos\varphi_0 (\theta_0 - \sin\theta_0 \cos\theta_0)}{4} \frac{G}{H},$$

où G et H sont les séries représentées par les formules (24) et (26).

La formule (29) étant complètement indépendante de i, la vitesse de rotation du plan d'oscillation est constante aux termes en ω^2 près, et elle est donnée à un instant quelconque par la formule (29) aux termes en ω^2 près.

On peut remarquer également que cette vitesse de rotation du plan d'oscillation ne contenant dans son expression ni g, ni μ, elle est, aux termes en ω^2 près, complètement indépendante des causes perturbatrices secondaires.

La valeur de T dépend, dans une certaine mesure, des causes perturbatrices secondaires, puisqu'elle contient μ et que, d'autre part, g peut être légèrement altéré par l'action de ces forces perturbatrices; mais cette influence sera, en réalité, négligeable.

Nous avons, en effet, d'abord

$$\mu = 0{,}0032,$$

de sorte que si $l = 10^m$, nous aurons

$$\mu\omega l = 0{,}032\ \omega = 0{,}0000023,$$

et, pour une journée entière, l'influence de ce terme serait seulement de moins de 0,2T.

Cette influence pourra donc se négliger, et nous verrons plus loin qu'il en est de même de celle tenant à la variation de g. De sorte que l'on pourra prendre, comme lorsqu'on ne tient pas compte de la rotation de la terre,

$$(30) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,H.$$

IV

Influence de la lune sur le mouvement du pendule.

Considérons la terre comme sphérique, et soient

M la masse de la terre;

m la masse de la lune;

T le centre de la terre;

L le centre de la lune;

A un point à la surface de la terre;

F l'attraction de la lune sur l'unité de masse au centre de la terre;

f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance;

G l'attraction de la terre sur l'unité de masse pour un point de sa surface.

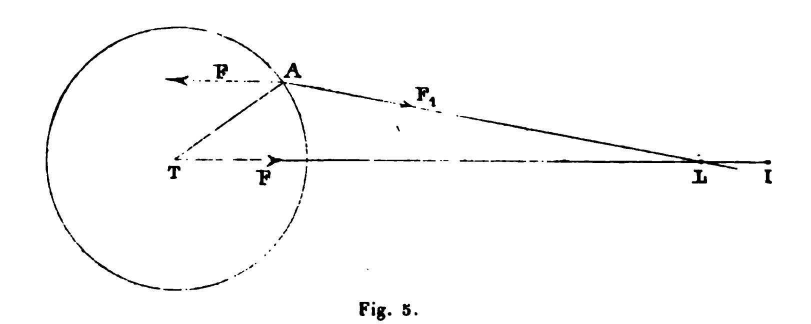


Fig. 5.

Si l'on fait abstraction du mouvement d'entraînement dû à la présence de la lune, il faudra appliquer à chaque point de la surface de la terre une force qui, pour l'unité de masse, soit égale et de sens contraire à l'attraction F de la lune sur l'unité de masse au centre de la terre.

D'ailleurs, un point de masse 1 situé en A subira de la part de la lune une attraction F_1 dirigée suivant AL et égale à

$$\frac{fm}{\overline{AL}^2}.$$

Par suite de la présence de la lune, le mouvement du point sera soumis à la résultante des deux forces F_1 dirigée suivant AL, et F parallèle à LT.

On aura d'ailleurs, R désignant le rayon de la terre,

$$TL = 60R, \quad m = 0{,}01255\,M,$$

et, par suite,

$$F = \frac{fm}{(60R)^2}, \quad G = \frac{fM}{R^2},$$

d'où

$$F = G\frac{m}{M}\frac{1}{3600}.$$

On en déduit aussi

$$F_1 = \frac{fm}{\overline{LA}^2} = F\left(\frac{60R}{LA}\right)^2,$$

donc, en négligeant les termes de l'ordre du carré de la parallaxe et désignant l'angle ATL par z, on aura, pour les composantes de la force perturbatrice due à la présence de la lune, suivant TL,

$$F_1 - F = F\left[\left(\frac{60R}{LA}\right)^2 - 1\right] = \frac{F}{30}\cos z,$$

ou, en tenant compte de la valeur

$$F = \frac{G}{3600}\frac{m}{M} = 0{,}000\,003\,486\,g,$$

$$F_1 - F = 0{,}000\,000\,1162\,g\cos z.$$

On aura d'une façon semblable, pour la composante perpendiculaire à TL (en négligeant toujours les termes de l'ordre du carré de la parallaxe),

$$F \frac{\sin z}{60} = 0{,}000\,000\,0581\, g \sin z,$$

en négligeant dans cette expression, comme dans la précédente, la différence entre l'attraction G et la pesanteur g.

On déduira de là, pour la composante de la force perturbatrice suivant la verticale du point A,

$$0{,}000\,000\,0581\, g\,(2\cos^2 z - \sin^2 z),$$

et suivant l'horizontale,

$$0{,}000\,000\,1743\, g \cos z \sin z.$$

La première composante aura pour valeur maximum

$$0{,}000\,000\,1162\, g,$$

et la seconde

$$0{,}000\,000\,087\,15\, g.$$

Cette dernière pourra donc déplacer la verticale d'un angle qui sera au plus de 0,018 de seconde.

Or, nous avons vu que l'influence des attractions perturbatrices sur le mouvement du pendule de Foucault se réduit à la variation d'intensité de la pesanteur dans la formule qui donne le temps 2T de la demi-oscillation, et au déplacement de la verticale, pour la rotation du plan d'oscillation, puisque nous avons fait voir que c'est autour de la verticale déplacée que se fait cette rotation.

Mais l'action de la lune étant prédominante parmi les attractions perturbatrices, on peut conclure de ce qui précède que l'influence de ces attractions perturbatrices peut être complètement négligée, et l'on peut considérer les formules (29) et (30) comme donnant, la première, la vitesse de rotation du plan d'oscillation autour de la verticale; la deuxième, le temps du quart d'oscillation.

V

Examen des cas où la vitesse initiale, au lieu d'être nulle, est seulement très petite de l'ordre de ω.

Si la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$ n'était pas rigoureusement nulle, mais avait une valeur très petite de l'ordre de ω; si, par exemple, on avait à l'instant initial

$$\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = \beta\omega,$$

le seul changement qu'il y aurait à faire serait de remplacer dans l'expression

$$\frac{d\tau}{dt} = -n + \frac{qG\pi}{8AT}$$

de la vitesse de rotation du plan d'oscillation la valeur (21) de q par la suivante

$$(21') \ldots \quad q_1 = \beta\omega + n\sin^2\theta_0 + mf'(\theta_0) + \omega^2 F_3(T_i).$$

En effet, d'abord, dans l'équation des forces vives, l'introduction de l'hypothèse en question ne pourrait que faire varier les termes en ω^2 qui figurent dans cette équation des forces vives, et ces termes en ω^2 n'influent pas, en fin de compte, sur les résultats finals.

Dans l'expression de $\frac{d\varphi}{dt}$, on n'aurait ensuite qu'à remplacer q par q_1, et il en serait par suite de même, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, dans l'expression de $\sqrt{1 - \cos\theta_i}$. Donc, en définitive, le seul changement sera la substitution de q_1 à q dans l'expression finale de $\frac{d\tau}{dt}$.

Cette remarque nous servira plus loin, lorsque nous étudierons le mouvement du pendule dans l'air; elle fait voir de plus l'importance qu'il y a, dans les expériences du pendule de Foucault, à ce que la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$ soit rigoureusement nulle, puisqu'une vitesse initiale très petite masquerait de suite l'influence de la rotation de la terre.

DEUXIÈME PARTIE.

MOUVEMENT DU PENDULE DE FOUCAULT DANS L'AIR.

I

Mouvement du pendule circulaire dans l'air, dans le cas des amplitudes quelconques et lorsqu'on suppose la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Soit l la longueur du pendule;
θ_0 l'angle d'écart initial;
θ l'angle d'écart à un instant quelconque;
g l'accélération de la pesanteur;
$g\gamma\frac{d\theta^2}{dt^2}$ la résistance de l'air rapportée à l'unité de masse;
$A^2 = \frac{g}{l}$

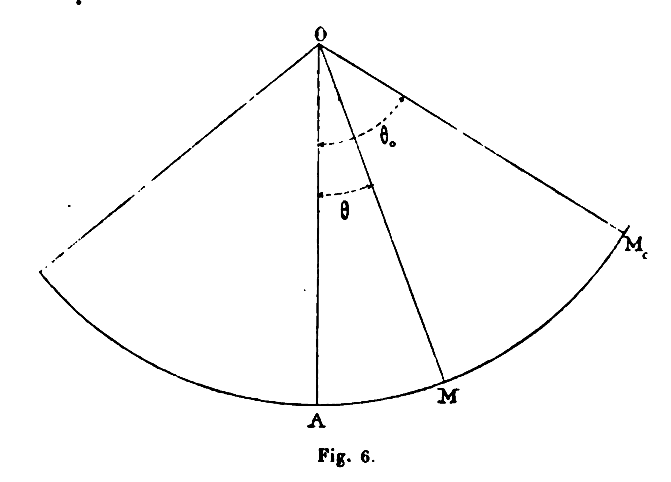


Fig. 6.

On a (*Traité de mécanique* de Mr Resal, tome VII, page 32), pour une sphère en laiton dont le rayon R serait exprimé en millimètres,

$$g\gamma\frac{d\theta^2}{dt^2} = \rho v^2 = \rho l^2\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

d'où

$$\gamma = \frac{\rho l^2}{g},$$

et comme

$$\rho = \frac{0{,}0236}{R},$$

on aura

$$\gamma = \frac{0{,}0236 l^2}{gR}.$$

R étant exprimé en millimètres, l et g en mètres.

Puisque nous supposons la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, l'équation que nous obtiendrons ne sera applicable que pour une seule oscillation simple (*), parce que, avec une expression de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, la résistance ne change pas de signe, ainsi que cela devrait être, lorsque $\frac{d\theta}{dt}$ change de signe.

Si l'on veut étendre à l'oscillation simple suivante les résultats obtenus pour la première, il faudra prendre comme angle d'écart initial de cette deuxième oscillation simple l'angle d'écart final de la première oscillation simple, pris en valeur absolue (ou, si on la prend avec son signe, changer le signe de γ, dans la formule relative à la première oscillation simple).

Ceci posé, la vitesse ayant pour valeur $-l\frac{d\theta}{dt}$, l'équation différentielle du mouvement sera

$$-l\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\sin\theta - \gamma g\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

ou

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma A^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + A^2\sin\theta = 0, \quad A^2 = \frac{g}{l}.$$

(*) Nous entendons par oscillation simple une oscillation du pendule à l'aller seulement, et par oscillation complète l'oscillation aller et retour, l'oscillation complète étant ainsi formée par la succession de deux oscillations simples.

Posons maintenant

$$u = \frac{d\theta^2}{dt^2};$$

l'équation (1) devient

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{du}{d\theta} - 2\gamma A^2 u + 2A^2 \sin\theta = 0,$$

équation différentielle linéaire du premier ordre, dont l'intégrale générale est

$$u = Ce^{2\gamma A^2 \theta} + \frac{2A^2}{1 + 4\gamma^2 A^4}(\cos\theta + 2\gamma A^2 \sin\theta).$$

Déterminant C par la condition $u = 0$ pour $\theta = \theta_0$, nous aurons l'équation (*)

$$(3) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2A^2}{1 + 4\gamma^2 A^4}\left[\cos\theta + 2\gamma A^2 \sin\theta - (\cos\theta_0 + 2\gamma A^2 \sin\theta_0) e^{2\gamma A^2(\theta - \theta_0)}\right].$$

Mais, d'après ce que nous avons dit, on a, pour une sphère en laiton dont le rayon est exprimé en millimètres,

$$\gamma = \frac{0{,}0236\, l^2}{gR}.$$

Or, dans les expériences, $\frac{l^2}{gR}$ sera en général inférieur à $\frac{1}{4}$, car si l est grand, on est obligé de prendre aussi pour R une valeur assez grande. Par exemple, si l'on avait $l = 10^{m}$, on ne pourrait guère prendre pour R une valeur inférieure à 40^{mm}, et l'on aurait par suite sensiblement

$$\frac{l^2}{gR} \leqslant \frac{1}{4}.$$

(*) Cette équation est due à M. Resal, qui l'a indiquée en 1857. M. Yvon Villarceau s'en est servi dans son *Mémoire sur les Chronomètres.*

Nous pouvons donc supposer

$$\gamma < 0{,}006,$$

d'où

$$\gamma^2 < 0{,}000\,036,$$
$$\gamma^3 < 0{,}000\,000\,216.$$

Remarquons que si l'on compare les termes en γ à ceux en ω, ω désignant toujours la vitesse angulaire de la rotation de la terre, on aura, puisque $\omega = 0{,}000\,0729$,

$$\gamma^2 < \frac{\omega}{2},$$
$$\gamma^3 < 0{,}003\,\omega.$$

On pourra donc négliger, dans tous les cas, les termes en γ^3.

Si donc nous développons l'exponentielle dans la formule (3), nous aurons, en négligeant les termes en γ^3,

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} dt = \dfrac{1+2\gamma^2 A^4}{A\sqrt{2}} \\ \times \dfrac{-d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0 - 2\gamma A^2[\sin\theta_0 - \sin\theta - (\theta_0-\theta)\cos\theta_0] + 2\gamma^2 A^4(\theta_0-\theta)[2\sin\theta_0 - (\theta_0-\theta)\cos\theta_0]}}, \end{array} \right.$$

en prenant le signe — devant le radical, puisque θ décroit lorsque t croit.

Nous poserons maintenant

$$(5) \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad \theta = \eta + \eta_1 \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \eta_0 + \eta_1,$$

η_1 désignant une constante choisie de telle sorte que la quantité sous le radical, dans l'expression de dt, qui est évidemment nulle pour $\eta = \eta_0$, le soit également pour $\eta = -\eta_0$.

Si nous substituons à θ et θ_0 leurs valeurs (5) dans l'équation (4), la quantité sous le radical deviendra

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\eta+\eta_1) - \cos(\eta_0+\eta_1) - 2\gamma A^2\left[\sin(\eta_0+\eta_1) - \sin(\eta+\eta_1) - (\eta_0-\eta)\cos(\eta_0+\eta_1)\right] \\ \qquad + 2\gamma^2 A^4(\eta_0-\eta)\left[2\sin(\eta_0+\eta_1) - (\eta_0-\eta)\cos(\eta_0+\eta_1)\right]. \end{array} \right.$$

Si nous exprimons que cette quantité est nulle pour $\eta = -\eta_0$, nous aurons

$$2 \sin \eta_0 \sin \eta_1 - 4\gamma A^2 [\sin \eta_0 \cos \eta_1 - \eta_0 \cos(\eta_0 + \eta_1)]$$
$$+ 8\gamma^2 A^4 \eta_0 [\sin(\eta_0 + \eta_1) - \eta_0 \cos(\eta_0 + \eta_1)] = 0.$$

Cette égalité nous fait voir d'abord que η_1 contiendra γ en facteur; si donc nous continuons à négliger les termes en γ^3, et par suite ceux en η_1^3, l'égalité précédente deviendra

$$2 \sin \eta_0 (1 - 2\gamma A^2 \eta_0)[\eta_1 - 2\gamma A^2 (1 - \eta_0 \cot \eta_0)] = 0,$$

d'où l'on tire

(7) . . . . $\eta_1 = 2\gamma A^2 (1 - \eta_0 \cot \eta_0)$,

valeur exacte aux termes en γ^3 près.

Nous pourrons déduire d'abord de cette valeur (7) l'angle d'écart du pendule à la fin de l'oscillation que nous considérons.

En effet, cet angle d'écart $-\theta_1$ correspond à $\eta = -\eta_0$, et, par suite,

$$-\theta_1 = -\eta_0 + \eta_1 = -\theta_0 + 2\eta_1.$$

Mais en négligeant le termes en γ^3,

$$\eta_1 = 2\gamma A^2 [1 - (\theta_0 - \eta_1) \cot(\theta_0 - \eta_1)] = 2\gamma A^2 (1 - \theta_0 \cot \theta_0) - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_0},$$

c'est-à-dire

$$\eta_1 = 2\gamma A^2 (1 - \theta_0 \cot \theta_0) \left[1 - 2\gamma A^2 \left(\frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0\right)\right].$$

Nous avons donc, pour la valeur θ_1 de l'angle d'écart final,

(8) $$\theta_1 = \theta_0 - 2\eta_1 = \theta_0 - 4\gamma A^2 (1 - \theta_0 \cot \theta_0) \left[1 - 2\gamma A^2 \left(\frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0\right)\right].$$

Ce résultat obtenu, si nous substituons dans l'expression (6) la

valeur (7) de η_1, et si nous négligeons toujours les termes en γ^3, nous aurons pour cette expression

$$(\cos\eta - \cos\eta_0)[1 + 2\gamma^2A^4(1 - \eta_0^2\cot^2\eta_0)] + 2\gamma A^2\cot\eta_0(\eta_0\sin\eta - \eta\sin\eta_0) + 2\gamma^2A^4\cos\eta_0(\eta_0^2 - \eta^2),$$

de sorte que nous pouvons écrire, toujours aux termes en γ^3 près,

$$-dt = \frac{1+2\gamma^2A^4}{A\sqrt{2}} \times \frac{d\eta}{\sqrt{[1+2\gamma^2A^4(1-\eta_0^2\cot^2\eta_0)](\cos\eta-\cos\eta_0)+2\gamma A^2\cot\eta_0(\eta_0\sin\eta-\eta\sin\eta_0)+2\gamma^2A^4\cos\eta_0(\eta_0^2-\eta^2)}},$$

ou

$$-dt = \frac{1+\gamma^2A^4(1+\eta_0^2\cot^2\eta_0)}{A\sqrt{2}} \times \left[1 + \frac{2\gamma A^2\cot\eta_0(\eta_0\sin\eta-\eta\sin\eta_0)+2\gamma^2A^4\cos\eta_0(\eta_0^2-\eta^2)}{\cos\eta-\cos\eta_0}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{\cos\eta-\cos\eta_0}}.$$

Nous pouvons développer l'expression qui est élevée à la puissance $-\frac{1}{2}$ par la formule du binôme, car le second terme, contenant γ en facteur *et étant fini aussi bien pour* $\eta = \eta_0$ *que pour* $\eta = -\eta_0$, c'est-à-dire aux deux limites de l'oscillation, sera toujours très petit.

Nous obtiendrons ainsi, en négligeant toujours les termes en γ^3,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} -dt = {} & \frac{1+\gamma^2A^4(1+\eta_0^2\cot^2\eta_0)}{A\sqrt{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{\cos\eta-\cos\eta_0}} \\ & - \frac{\gamma A\cot\eta_0}{\sqrt{2}} \frac{\eta_0\sin\eta - \eta\sin\eta_0}{\cos\eta-\cos\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{\cos\eta-\cos\eta_0}} \\ & - \frac{\gamma^2A^3}{\sqrt{2}} \frac{\cos\eta_0(\eta_0^2-\eta^2)}{\cos\eta-\cos\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{\cos\eta-\cos\eta_0}} \\ & + \frac{3\gamma^2A^3\cot^2\eta_0}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\eta_0\sin\eta-\eta\sin\eta_0}{\cos\eta-\cos\eta_0}\right)^2 \frac{d\eta}{\sqrt{\cos\eta-\cos\eta_0}}. \end{aligned}\right.$$

Nous poserons maintenant

$$\cos\eta = \cos\eta_0 \sin^2 u + \cos^2 u,$$

u désignant une nouvelle variable qui croît de $-\frac{\pi}{2}$ à 0, et ensuite de 0 à $\frac{\pi}{2}$ lorsque η décroît de η_0 à 0, puis de 0 à $-\eta_0$. Nous aurons alors, en posant de plus, pour simplifier l'écriture,

$$k^2 = \frac{1-\cos\eta_0}{2} = \sin^2\frac{\eta_0}{2},$$

$$\cos\eta - \cos\eta_0 = 2k^2\cos^2 u,$$

$$1 - \cos\eta = 2k^2\sin^2 u,$$

$$1 + \cos\eta = 2(1 - k^2\sin^2 u)$$

$$(10) \quad \ldots \quad \sin\eta = -2k\sin u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}.$$

Nous prenons le signe — dans l'expression de $\sin\eta$, parce que, pour η positif, u est négatif, et réciproquement.

On aura

$$d\eta = -\frac{2k\cos u\,du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

$$(11) \quad \ldots \quad \frac{d\eta}{\sqrt{2}\sqrt{\cos\eta-\cos\eta_0}} = \frac{-du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}.$$

Nous devons maintenant calculer en fonction de u les quantités

$$\frac{\eta_0\sin\eta - \eta\sin\eta_0}{\cos\eta-\cos\eta_0} \quad \text{et} \quad \frac{\eta_0^2-\eta^2}{\cos\eta-\cos\eta_0}.$$

Pour cela, nous déduirons d'abord de l'équation (10)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\eta = -2k\sin u \Big[& 1 - \frac{k^2}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}\frac{k^4}{4}\sin^4 u - \cdots \\ & - \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{k^{2n}\sin^{2n} u}{2n} - \cdots \Big], \end{aligned} \right.$$

puis de l'équation (11)

$$d\eta = -2k\cos u\left[1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 u+\frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4 u+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}\sin^{2n}u+\cdots\right]du,$$

ou, en intégrant,

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}\eta = -2k\sin u\Big[1&+\frac{1}{2}\frac{k^2}{3}\sin^2 u+\frac{1.3}{2.4}\frac{k^4}{5}\sin^4 u+\cdots\\&+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{k^{2n}}{2n+1}\sin^{2n}u+\cdots\Big].\end{aligned}\right.$$

Nous déduirons maintenant des équations (12) et (13)

$$(14)\ .\ .\quad\left\{\begin{aligned}&\eta_0\sin\eta-\eta\sin\eta_0 = -2k\sin u\Big[\eta_0-\sin\eta_0\\&-\frac{k^2}{2}\left(\eta_0+\frac{\sin\eta_0}{3}\right)\sin^2 u-\frac{1}{2}\frac{k^4}{4}\left(\eta_0+\frac{3}{5}\sin\eta_0\right)\sin^4 u-\cdots\\&-\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{k^{2n}}{2n}\left(\eta_0+\frac{2n-1}{2n+1}\sin\eta_0\right)\sin^{2n}u\ldots\Big].\end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette équation est nul pour $\eta = \pm\eta_0$, c'est-à-dire pour $u = \pm\frac{\pi}{2}$; il doit donc en être de même du second, et il faut, par suite, que l'on ait :

$$0 = \eta_0-\sin\eta_0-\frac{k^2}{2}\left(\eta_0+\frac{\sin\eta_0}{3}\right)-\frac{1}{2}\frac{k^4}{4}\left(\eta_0+\frac{3}{5}\sin\eta_0\right)-\cdots$$
$$-\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{k^{2n}}{2n}\left(\eta_0+\frac{2n-1}{2n+1}\sin\eta_0\right)-\cdots$$

En multipliant cette équation par $2k\sin u$ et l'ajoutant avec

l'équation (14), nous aurons

$$\eta_0 \sin \eta - \eta \sin \eta_0 = -2k \sin u \left[\frac{k^2}{2}\left(\eta_0 + \frac{\sin \eta_0}{3}\right)(1 - \sin^2 u) \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{k^4}{4}\left(\eta_0 + \frac{3}{5}\sin \eta_0\right)(1 - \sin^4 u) + \cdots$$

$$\left. + \frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n-2)}\frac{k^{2n}}{2n}\left(\eta_0 + \frac{2n-1}{2n+1}\sin \eta_0\right)\left(1 - \sin^{2n} u\right) + \cdots \right],$$

ou

$$(15) \quad \begin{cases} \eta_0 \sin \eta - \eta \sin \eta_0 = \\ -2k \sin u \cos^2 u \,[a_0 + a_1 \sin^2 u + a_2 \sin^4 u + \cdots + a_n \sin^{2n} u + \cdots], \end{cases}$$

en posant

$$a_0 = \frac{k^2}{2}\left(\eta_0 + \frac{1}{3}\sin \eta_0\right) + \frac{1}{2}\frac{k^4}{4}\left(\eta_0 + \frac{3}{5}\sin \eta_0\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n-2)}\frac{k^{2n}}{2n}\left(\eta_0 + \frac{2n-1}{2n+1}\sin \eta_0\right) + \cdots,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{k^4}{4}\left(\eta_0 + \frac{3}{5}\sin \eta_0\right) + \cdots + \frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n-2)}\frac{k^{2n}}{2n}\left(\eta_0 + \frac{2n-1}{2n+1}\sin \eta_0\right) + \cdots,$$

$$a_2 = \frac{1.3\, k^6}{2.4\, 6}\left(\eta_0 + \frac{5}{7}\sin \eta_0\right) + \cdots + \frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n-2)}\frac{k^{2n}}{2n}\left(\eta_0 + \frac{2n-1}{2n+1}\sin \eta_0\right) + \cdots,$$

. . . .

Nous aurons donc

$$(16) \quad \frac{\eta_0 \sin \eta - \eta \sin \eta_0}{\cos \eta - \cos \eta_0} = -\frac{\sin u}{k}\left(a_0 + a_1 \sin^2 u + a_2 \sin^4 u + \cdots\right).$$

On déduira, d'ailleurs, de l'équation (13)

$$\eta^2 = 4k^2 \sin^2 u \left[1 + k^2 b_1 \sin^2 u + k^4 b_2 \sin^4 u + \cdots + k^{2n} b_n \sin^{2n} u + \cdots\right],$$

où nous avons posé

$$b_1 = 2 \cdot \frac{1}{2.3},$$

$$b_2 = 2 \cdot \frac{1.3}{2.4.5} + \left(\frac{1}{2.3}\right)^2,$$

. . . .

$$b_n = 2 \cdot \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n\,(2n+1)} + 2\,\frac{1}{2.3}\,\frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n-2)(2n-1)} + \cdots$$

. . . .

On conclut de là

$$\eta_0^2 = 4k^2 (1 + k^2 b_1 + k^4 b_2 + \cdots + k^{2n} b_n + \cdots),$$

et, par suite,

$$\eta_0^2 - \eta^2 = 4k^2 \cos^2 u\, [c_0 + c_1 \sin^2 u + c_2 \sin^4 u + \cdots + c_n \sin^{2n} u + \cdots),$$

avec

$$c_0 = 1 + k^2 b_1 + k^4 b_2 + \cdots + k^{2n} b_n + \cdots,$$
$$c_1 = k^2 b_1 + k^4 b_2 + \cdots + k^{2n} b_n + \cdots,$$
$$c_2 = k^4 b_2 + k^6 b_3 + \cdots,$$

. . . .

On a donc

$$\frac{\eta_0^2 - \eta^2}{\cos \eta - \cos \eta_0} = 2\,[c_0 + c_1 \sin^2 u + c_2 \sin^4 u + \cdots + c_n \sin^{2n} u + \cdots].$$

L'équation (16) nous donnera, d'ailleurs, en l'élevant au carré,

$$\left(\frac{\eta_0 \sin \eta - \eta \sin \eta_0}{\cos \eta - \cos \eta_0}\right)^2 = \frac{\sin^2 u}{k^2} (d_0 + d_1 \sin^2 u + d_2 \sin^4 u + \cdots),$$

où

$$d_0 = a_0^2,$$
$$d_1 = 2a_0 a_1,$$
$$d_2 = 2a_0 a_2 + a_1^2,$$
$$d_3 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2,$$

. . . .

De sorte que si nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$P = 1 + \gamma^2 A^4 (1 + \eta_0^2 \cot^2 \eta_0),$$

$$Q = \frac{\gamma A^2 \cot \eta_0}{k},$$

$$R = 2\gamma^2 A^4 \cos \eta_0,$$

$$S = \frac{3\gamma^2 A^4 \cot^2 \eta_0}{2k^2}.$$

nous aurons

$$dt = \frac{-d\eta}{A\sqrt{2}\sqrt{\cos\eta - \cos\eta_0}} \Big[P - R(c_0 + c_1 \sin^2 u + c_2 \sin^4 u + \cdots) + S\sin^2 u (d_0 + d_1 \sin^2 u + d_2 \sin^4 u + \cdots) + Q \sin u (a_0 + a_1 \sin^2 u + a_2 \sin^4 u + \cdots) \Big].$$

Mais

$$\frac{d\eta}{\sqrt{2}\sqrt{\cos\eta - \cos\eta_0}} = \frac{-du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

$$= -\left[1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 u + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4 u + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} \sin^{2n} u + \cdots\right] du,$$

et nous aurons par suite, en tenant compte de cette égalité,

$$dt = \frac{1}{A}\left[\lambda_0 + \lambda_1 \sin^2 u + \lambda_2 \sin^4 u + \cdots + \lambda_n \sin^{2n} u + \cdots\right] du + \frac{1}{A}\left[\mu_0 \sin u + \mu_1 \sin^3 u + \cdots + \mu_n \sin^{2n+1} u + \cdots\right] du,$$

avec

$$\lambda_0 = P - Rc_0,$$

$$\lambda_1 = P \frac{k^2}{2} - R\left(\frac{1}{2} k^2 c_0 + c_1\right) + Sd_0,$$

$$\lambda_2 = P \frac{1.3}{2.4} k^4 - R\left(\frac{1.3}{2.4} k^4 c_0 + \frac{1}{2} k^2 c_1 + c_2\right) + S\left(\frac{1}{2} k^2 d_0 + d_1\right),$$

. . . .

. . . .

$$\lambda_n = P\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}$$

$$-R\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}c_0+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}k^{2n-2}c_1+\cdots+\frac{1}{2}k^2c_{n-1}+c_n\right]$$

$$+S\left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}k^{2n-2}d_0+\cdots+\frac{1}{2}k^2d_{n-2}+d_{n-1}\right];$$

. . . .

$$\mu_0 = Qa_0,$$

$$\mu_1 = Q\left(\frac{1}{2}k^2a_0+a_1\right),$$

$$\mu_2 = Q\left(\frac{1.3}{2.4}k^4a_0+\frac{1}{2}k^2a_1+a_2\right).$$

. . . .

. . . .

$$\mu_n = Q\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}a_0+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}k^{2n-2}a_1+\cdots+\frac{1}{2}k^2a_{n-1}+a_n\right].$$

. . . .

. . . .

Nous aurons ensuite, au moyen des formules

$$\int \sin^{2n}u\,du = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}u$$

$$-\frac{\cos u \sin u}{2n}\left[\sin^{2n-2}u+\frac{2n-1}{2n-2}\sin^{2n-4}u+\cdots+\frac{(2n-1)\ldots 3}{(2n-2)\ldots 2}\right]$$

et

$$\int \sin^{2n+1}u\,du = -\frac{\cos u}{2n+1}\left[\sin^{2n}u+\frac{2n}{2n-1}\sin^{2n-2}u+\cdots+\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\right]$$

et en remarquant que $t=0$ pour $u=-\frac{\pi}{2}$,

$$(17)\quad \begin{cases} t = \frac{1}{A}\Big[H\left(u+\frac{\pi}{2}\right) - \cos u \sin u\,(h_0+h_1\sin^2u+h_2\sin^4u+\cdots) \\ \qquad -\cos u\,(p_0+p_1\sin^2u+p_2\sin^4u+\cdots)\Big], \end{cases}$$

où

$$H = \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1.3}{2.4}\lambda_2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\lambda_n + \cdots,$$

$$h_0 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_2}{4} + \cdots \qquad + \frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{\lambda_n}{2n} + \cdots,$$

$$h_1 = \frac{\lambda_2}{4} + \frac{5}{4}\frac{\lambda_3}{6} + \cdots \qquad + \frac{5.7\ldots(2n-1)}{4.6\ldots(2n-2)}\frac{\lambda_n}{2n} + \cdots.$$

. . . .

. . . .

$$p_0 = \mu_0 + \frac{2}{1}\frac{\mu_1}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{\mu_2}{5} + \cdots + \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}\frac{\mu_n}{2n+1} + \cdots$$

$$p_1 = \frac{\mu_1}{3} + \frac{4}{3}\frac{\mu_2}{5} + \cdots \qquad + \frac{4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{\mu_n}{2n+1} + \cdots$$

. . . .

. . . .

sans qu'il soit nécessaire d'écrire d'autres termes, la loi de formation se voyant tout de suite.

Nous nous proposons maintenant de déterminer :

1° La durée 2T de l'oscillation simple ;

2° La durée de la demi-oscillation descendante.

Pour avoir 2T, on devra faire $u = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (17); nous aurons ainsi

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2T = \frac{\pi H}{A}.$$

Pour déterminer le temps de la demi-oscillation descendante, nous remarquerons que pour $\theta = 0$, on a

$$\eta = -\eta_1,$$

et, par suite,

$$1 - \cos\eta = 1 - \cos\eta_1 = 2\sin^2\frac{\eta_1}{2} = 2k^2\sin^2 u_1,$$

u_1 étant la valeur correspondante de u.

On déduit de là, en remarquant que u est négatif pour η positif et réciproquement,

$$k \sin u_1 = \sin \frac{\eta_1}{2};$$

d'où, puisque η_1 contient γ en facteur et que nous négligeons les termes en γ^3,

$$u_1 = \frac{\eta_1}{2k}.$$

Nous aurons donc, aux termes en γ^3 près, pour le temps $T + \varepsilon$ de la demi-oscillation descendante,

$$(19) \quad . \; . \; . \; T + \varepsilon = \frac{1}{A}\left[H\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\eta_1}{2k}\right) - \frac{\eta_1}{2k} h_0 - p_0\right].$$

Proposons-nous ensuite de trouver les premiers termes des expressions ci-dessus développées suivant les puissances croissantes de θ.

Nous avons d'abord

$$\eta_1 = 2\gamma A^2 (1 - \theta_0 \cot \theta_0)\left[1 - 2\gamma A^2\left(\frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0\right)\right]$$

avec

$$\cot \theta_0 = \frac{1}{\theta_0}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{3} - \frac{\theta_0^4}{45}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_0} = -\frac{d(\cot \theta_0)}{d\theta_0} = \frac{1}{\theta_0^2}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{3} + \frac{\theta_0^4}{15}\right),$$

et, par suite,

$$1 - \theta_0 \cot \theta_0 = \frac{\theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right),$$

$$\frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0 = \frac{2\theta_0}{3}\left(1 + \frac{2\theta_0^2}{15}\right).$$

Donc

$$\eta_1 = \frac{2\gamma A^2 \theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right)\left[1 - \frac{4\gamma A^2 \theta_0}{3}\left(1 + \frac{2\theta_0^2}{15}\right)\right]$$

$$= \frac{2\gamma A^2 \theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right) - \frac{8\gamma^2 A^4 \theta_0^3}{9}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{5}\right).$$

où

$$H = \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1.3}{2.4}\lambda_2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\lambda_n + \cdots,$$

$$h_0 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_2}{4} + \cdots \qquad + \frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{\lambda_n}{2n} + \cdots,$$

$$h_1 = \frac{\lambda_2}{4} + \frac{5}{4}\frac{\lambda_3}{6} + \cdots \qquad + \frac{5.7\ldots(2n-1)}{4.6\ldots(2n-2)}\frac{\lambda_n}{2n} + \cdots.$$

. . . .

. . . .

$$p_0 = \mu_0 + \frac{2}{1}\frac{\mu_1}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{\mu_2}{5} + \cdots + \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}\frac{\mu_n}{2n+1} + \cdots$$

$$p_1 = \frac{\mu_1}{3} + \frac{4}{3}\frac{\mu_2}{5} + \cdots \qquad + \frac{4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{\mu_n}{2n+1} + \cdots$$

. . . .

. . . .

sans qu'il soit nécessaire d'écrire d'autres termes, la loi de formation se voyant tout de suite.

Nous nous proposons maintenant de déterminer :

1° La durée 2T de l'oscillation simple ;

2° La durée de la demi-oscillation descendante.

Pour avoir 2T, on devra faire $u = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (17); nous aurons ainsi

$$(18) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2T = \frac{\pi H}{A}.$$

Pour déterminer le temps de la demi-oscillation descendante, nous remarquerons que pour $\theta = 0$, on a

$$\eta = -\eta_1,$$

et, par suite,

$$1 - \cos\eta = 1 - \cos\eta_1 = 2\sin^2\frac{\eta_1}{2} = 2k^2\sin^2 u_1,$$

u_1 étant la valeur correspondante de u.

On déduit de là, en remarquant que u est négatif pour η positif et réciproquement,

$$k \sin u_1 = \sin \frac{\eta_1}{2};$$

d'où, puisque η_1 contient γ en facteur et que nous négligeons les termes en γ^3,

$$u_1 = \frac{\eta_1}{2k}.$$

Nous aurons donc, aux termes en γ^3 près, pour le temps $T + \varepsilon$ de la demi-oscillation descendante,

$$(19) \quad . \; . \; . \; T + \varepsilon = \frac{1}{A}\left[H\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\eta_1}{2k}\right) - \frac{\eta_1}{2k} h_0 - p_0\right].$$

Proposons-nous ensuite de trouver les premiers termes des expressions ci-dessus développées suivant les puissances croissantes de θ.

Nous avons d'abord

$$\eta_1 = 2\gamma A^2 (1 - \theta_0 \cot \theta_0)\left[1 - 2\gamma A^2\left(\frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0\right)\right]$$

avec

$$\cot \theta_0 = \frac{1}{\theta_0}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{3} - \frac{\theta_0^4}{45}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_0} = -\frac{d(\cot \theta_0)}{d\theta_0} = \frac{1}{\theta_0^2}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{3} + \frac{\theta_0^4}{15}\right),$$

et, par suite,

$$1 - \theta_0 \cot \theta_0 = \frac{\theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right),$$

$$\frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0 = \frac{2\theta_0}{3}\left(1 + \frac{2\theta_0^2}{15}\right).$$

Donc

$$\eta_1 = \frac{2\gamma A^2 \theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right)\left[1 - \frac{4\gamma A^2 \theta_0}{3}\left(1 + \frac{2\theta_0^2}{15}\right)\right]$$

$$= \frac{2\gamma A^2 \theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right) - \frac{8\gamma^2 A^4 \theta_0^3}{9}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{5}\right).$$

Mais γ^2 étant très petit par rapport à γ, puisque nous négligeons les termes en $\gamma\theta_0^6$, il conviendra de négliger également ceux en $\gamma^2\theta_0^5$, et de prendre, par suite,

$$\eta_1 = \frac{2\gamma A^2\theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right) - \frac{8\gamma^2 A^4\theta_0^3}{9}.$$

Nous aurons alors, pour la valeur absolue θ_1 de l'angle d'écart à la fin de la première oscillation simple,

$$\theta_1 = \theta_0 - 2\eta_1 = \theta_0 - \frac{4\gamma A^2\theta_0^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{15}\right) + \frac{16\gamma^2 A^4\theta_0^3}{9}$$

et ensuite

$$k = \sin\frac{\eta_0}{2} = \sin\frac{\theta_0 - \eta_1}{2} = \left(1 - \frac{\eta_1^2}{8}\right)\sin\frac{\theta_0}{2} - \frac{\eta_1}{2}\cos\frac{\theta_0}{2},$$

ou, en négligeant, comme plus haut, les termes en $\gamma\theta_0^6$ et ceux en $\gamma^2\theta_0^5$,

$$(20) \quad . \quad . \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2} - \frac{\gamma A^2\theta_0^2}{3}\left(1 - \frac{7\theta_0^2}{120}\right) + \frac{4\gamma^2 A^4\theta_0^3}{9}.$$

Passons maintenant au calcul de H.

Nous avons d'abord, en nous bornant toujours à la même approximation :

$$P - R = 1 + \gamma^2 A^4 (1 + \eta_0^2 \cot^2 \eta_0 - 2\cos\eta_0) = 1 + \frac{\gamma^2 A^4 \theta_0^2}{3}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{20}\right).$$

D'ailleurs, en négligeant toujours les termes en $\gamma\theta_0^6$ et $\gamma^2\theta_0^5$, et remarquant que $c_0 = 1 + c_1$, nous pourrons écrire

$$H = (P - R)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] - Rc_1\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{16}k^2\right)$$
$$- \frac{3Rc_2}{8} + \frac{Sd_0}{2} + \frac{3S}{8}\left(d_1 + \frac{k^2 d_0}{2}\right).$$

Calculons d'abord l'expression

$$(P - R)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots\right];$$

en tenant compte de la valeur (20) de k, elle deviendra

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\theta_0}{2}+\cdots$$
$$-\frac{\gamma A^2\theta_0^3}{12}\left(1+\frac{29\theta_0^2}{160}\right)+\frac{\gamma^2A^4\theta_0^2}{3}\left(1+\frac{103\theta_0^2}{240}\right).$$

Nous aurons ensuite

$$c_1=b_1k^2+b_2k^4=\frac{k^2}{3}+\frac{8k^4}{45},$$
$$c_2=b_2k^4=\frac{8k^4}{45},$$

$$\frac{Rc_1}{2}\left(3+\frac{7}{8}k^2\right)+\frac{3Rc_2}{8}=\frac{Rk^2}{2}\left(1+\frac{23}{24}k^2\right)=\frac{\gamma^2A^4\theta_0^2}{4}\left(1-\frac{11\theta_0^2}{32}\right),$$

$$d_0=a_0^2=\frac{k^4}{4}\left(\eta_0+\frac{1}{3}\sin\eta_0\right)\left[\eta_0+\frac{1}{3}\sin\eta_0+\frac{k^2}{2}\left(\eta_0+\frac{3}{5}\sin\eta_0\right)\right],$$

$$Sd_0=\frac{3\gamma^2A^4\cos^2\theta_0}{32\cos^2\frac{\theta_0}{2}}\left(\theta_0+\frac{1}{3}\sin\theta_0\right)\left[\theta_0+\frac{1}{3}\sin\theta_0+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\left(\theta_0+\frac{3}{5}\sin\theta_0\right)\right]$$
$$=\frac{\gamma^2A^4\theta_0^2}{6}\left(1-\frac{41\theta_0^2}{60}\right).$$

Puis, avec la même approximation,

$$\frac{1}{2}k^2d_0+d_1=\frac{k^6}{8}\left(\eta_0+\frac{1}{3}\sin\eta_0\right)\left(2\eta_0+\frac{14}{15}\sin\eta_0\right),$$
$$S\left(\frac{1}{2}k^2d_0+d_1\right)=\frac{11\gamma^2A^4\theta_0^4}{240}.$$

Si donc nous posons

$$H_1=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0^2}{2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\theta_0}{2}+\cdots$$

nous aurons enfin

$$(21)\qquad H=H_1-\frac{\gamma A^2\theta_0^3}{12}\left(1+\frac{29\theta_0^2}{160}\right)+\frac{\gamma^2A^4\theta_0^2}{6}\left(1+\frac{109\theta_0^2}{96}\right).$$

En remplaçant A par sa valeur, nous aurons alors, pour le temps de l'oscillation,

$$2T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}H_1-\pi\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\theta_0^3}{12}\left(1+\frac{29\theta_0^2}{160}\right)$$
$$+\pi\frac{\gamma^2 g}{6l}\sqrt{\frac{g}{l}}\theta_0^2\left(1+\frac{109\theta_0^2}{96}\right);$$

$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}H_1$ est le temps de l'oscillation dans le vide; si donc on se borne au premier terme de l'expression ci-dessus, on voit que par suite de la résistance de l'air la durée de l'oscillation est diminuée de

$$\pi\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\theta_0^3}{12}.$$

Remarquons toutefois que pour les amplitudes très petites, le second terme pourrait devenir plus petit que le troisième; il faudrait pour cela que l'on ait

$$\frac{\theta_0}{2}<\frac{\gamma g}{l}:$$

ou, comme

$$\gamma=\frac{0,0236\, l^2}{gR},$$

$$\theta_0<\frac{0,0472\, l}{R}.$$

Mais le facteur $\frac{l}{R}$ étant en général plus petit que $\frac{1}{4}$, il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que l'on ait sensiblement

$$\theta_0<0,01,$$

ou, en minutes,

$$\theta_0<34'.$$

Mais nous supposons expressément qu'il ne s'agit pas d'amplitudes très petites, car pour les amplitudes très petites, les deux derniers termes sont l'un et l'autre complètement négligeables, quelle que soit d'ailleurs la valeur relative de l'un par rapport à l'autre.

Nous supposons donc qu'il s'agit d'amplitudes assez grandes, et alors le deuxième terme est très supérieur au troisième.

Mais, ainsi que nous venons de le rappeler, pour une sphère en laiton dont le rayon R est exprimé en millimètres, on a

$$\gamma = \frac{0,0236\, l^2}{g\mathrm{R}}.$$

Nous avons par suite, pour la diminution de la durée de l'oscillation due à la résistance de l'air (en supposant qu'il ne s'agit pas d'amplitudes très petites, et en nous bornant au premier terme),

$$\pi \frac{0,0236\, l}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\theta_0^3}{12},$$

soit sensiblement

$$\pi \frac{0,002\, l}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{l}{g}}\, \theta_0^3,$$

ou, pour la diminution relative, en divisant $\pi \mathrm{H}_1 \sqrt{\frac{l}{g}}$,

$$\frac{0,002 l\, \theta_0^3}{\mathrm{RH}_1}.$$

Cette diminution sera en général complètement négligeable, car le facteur $\frac{l}{\mathrm{R}}$ sera presque toujours plus petit que $\frac{1}{4}$.

Calculons maintenant $\mathrm{T} + \varepsilon$ par la formule (19), en nous bornant toutefois à garder les termes en $\gamma\theta_0^3$ et ceux en $\gamma^2\theta_0^2$.

Nous aurons

$$\mathrm{T} + \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{A}} \left[\frac{\pi \mathrm{H}}{2} + (\mathrm{H} - h_0) \frac{\eta_1}{2k} - p_0 \right],$$

et nous aurons

$$\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{4\gamma A^3\theta_p^2}{3\pi}\frac{1+\frac{\theta_p^2}{15}}{1+\frac{\theta_p^2}{16}}.$$

Mais, dans les expériences, la fraction

$$\frac{1+\frac{\theta_p^2}{15}}{1+\frac{\theta_p^2}{16}} = 1 + \frac{\theta_p^2}{240+15\theta_p^2}$$

sera toujours très voisine de 1.

Pour $\theta_p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire en degrés pour 28°39′, cette fraction serait égale à

$$1{,}001.$$

Pour $\theta_p = 1$, ou en degrés 57°18′, elle serait égale à

$$1{,}004.$$

On pourra donc remplacer cette fraction par l'unité, et prendre

$$\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{4\gamma A^3\theta_p^2}{3\pi}.$$

Nous aurons, par suite,

$$-\frac{d\theta_p}{\theta_p^2} = \frac{4\gamma A^3}{3\pi}dt,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{\theta_p} = \frac{1}{\theta_0} + \frac{4\gamma A^3}{3\pi}t;$$

d'où

$$\theta_p = \frac{\theta_0}{1+\theta_0\lambda t},$$

en posant

$$\lambda = \frac{4\gamma A^3}{3\pi}$$



Mais

$$\eta_0 = \theta_0 - \eta_1 ;$$

donc

$$p_0 = \frac{\gamma A^2 \theta_0}{3}\left(1 - \frac{5\theta_0^2}{24}\right) - \frac{2\gamma^2 A^4 \theta_0^2}{9},$$

et enfin

$$\varepsilon = \frac{\gamma A \theta_0}{3}\left(1 + \frac{17\theta_0^2}{40}\right) - \frac{2\gamma^2 A^3 \theta_0^2}{9}.$$

Cherchons enfin ce que sera devenue l'amplitude des oscillations au bout d'un temps donné.

D'après ce que nous avons dit, les formules ne s'appliquent qu'à une seule oscillation, mais on peut cependant s'en servir pour résoudre le problème en question, tout au moins avec une approximation suffisante pour l'objet que nous avons en vue, en opérant de la manière suivante :

Soit θ_p l'amplitude au commencement d'une oscillation simple quelconque; les formules que nous avons établies s'appliquent évidemment à cette oscillation, à condition d'y remplacer θ_0 par θ_p.

A la fin de l'oscillation simple en question, l'amplitude sera, par suite,

$$\theta_p - \frac{4\gamma A^2 \theta_p^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_p^2}{15}\right) + \frac{16\gamma^2 A^4 \theta_p^3}{9}.$$

Mais en considérant l'amplitude comme une fonction continue du temps, assimilant la décroissance pendant une oscillation à celle pendant un temps infiniment petit, et désignant par $2T_p$ le temps de cette oscillation, nous aurons

$$\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{1}{2T_p}\left[\frac{4\gamma A^2 \theta_p^2}{3}\left(1 + \frac{\theta_p^2}{15}\right) - \frac{16\gamma^2 A^4 \theta_p^3}{9}\right].$$

Mais si nous nous bornons à garder dans le second membre les termes en $\gamma\theta_p^4$ et ceux en $\gamma^2\theta_p^3$, nous pourrons prendre, puisque le second membre contient déjà $\gamma\theta_p^2$ en facteur

$$2T_p = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_p^2}{16}\right),$$

et nous aurons

$$\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{4\gamma A^3\theta_p^2}{3\pi}\frac{1+\frac{\theta_p^2}{15}}{1+\frac{\theta_p^2}{16}}.$$

Mais, dans les expériences, la fraction

$$\frac{1+\frac{\theta_p^2}{15}}{1+\frac{\theta_p^2}{16}} = 1 + \frac{\theta_p^2}{240+15\theta_p^2}$$

sera toujours très voisine de 1.

Pour $\theta_p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire en degrés pour 28°39′, cette fraction serait égale à

1,001.

Pour $\theta_p = 1$, ou en degrés 57°18′, elle serait égale à

1,004.

On pourra donc remplacer cette fraction par l'unité, et prendre

$$\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{4\gamma A^3\theta_p^2}{3\pi}.$$

Nous aurons, par suite,

$$-\frac{d\theta_p}{\theta_p^2} = \frac{4\gamma A^3}{3\pi}dt,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{\theta_p} = \frac{1}{\theta_0} + \frac{4\gamma A^3}{3\pi}t;$$

d'où

$$\theta_p = \frac{\theta_0}{1+\theta_0\lambda t},$$

en posant

$$\lambda = \frac{4\gamma A^3}{3\pi}$$

II

Influence de la résistance de l'air sur le mouvement du pendule de Foucault.

L'équation qui donne le mouvement du pendule plan, lorsque l'on tient compte de la résistance de l'air, permettra d'obtenir l'équation du mouvement de la projection du pendule sur le plan d'oscillation, tel que nous l'avons défini en étudiant le pendule de Foucault.

En effet, ce mouvement, de la projection du pendule sur le plan d'oscillation se fait sous l'influence de la projection sur ce plan des forces réelles et des forces fictives.

Mais les forces réelles sont la pesanteur, la résistance de l'air et aussi la tension du fil; toutefois il n'y a pas lieu de tenir compte de cette dernière force, car sur le plan d'oscillation la variation de la distance de la projection du pendule au point de suspension étant au plus de l'ordre de ω^2, il en sera de même du travail de la tension, et ce travail pourra donc être joint aux autres termes en ω^2. Quant à la pesanteur, elle se projette en vraie grandeur sur ce plan d'oscillation, et son travail $l(\cos\theta - \cos\theta_0) = l(\cos\theta' - \cos\theta_0)$, aux termes en ω^2 près; la résistance de l'air

$$\pm \gamma g \frac{v^2}{l^2}$$

(son sens varie suivant qu'il s'agit d'une oscillation impaire ou paire) aura pour projection

$$\pm \gamma g \frac{v_1^2}{l^2} \frac{1}{\cos\varepsilon},$$

en désignant par v_1 la projection de la vitesse sur le plan d'oscillation et par ε l'angle que fait la vitesse avec ce même plan. Mais cet angle est de l'ordre de ω (ce fait sera mis complètement en évidence plus loin); donc $\frac{1}{\cos\varepsilon}$ diffère de l'unité par

un terme de l'ordre de ω^2. On voit par là qu'en regardant la projection de la résistance comme proportionnelle au carré de la projection de la vitesse, on commet une erreur seulement de l'ordre de ω^2.

Si nous considérons maintenant les forces fictives, provenant du mouvement d'entrainement du plan d'oscillation autour du point de suspension O du pendule, nous remarquerons que ce mouvement est la résultante d'une rotation qui se fait avec une vitesse angulaire ω autour d'une parallèle à l'axe de la terre passant par O, et de la rotation du plan d'oscillation par rapport à la terre, rotation qui se fait autour de OZ.

Cette seconde rotation étant également d'ordre ω, la rotation résultante sera aussi d'ordre ω, ainsi que la vitesse angulaire de déplacement de l'axe instantané de cette rotation résultante.

Par suite, la force d'inertie dans le mouvement d'entrainement correspondant sera de l'ordre de ω^2 et la force centrifuge composée d'ordre ω.

Mais la force centrifuge composée est perpendiculaire à la vitesse relative, et comme cette vitesse relative fait un angle d'ordre ω avec sa projection sur le plan d'oscillation, la force centrifuge composée fera avec la projection de la vitesse relative sur le plan d'oscillation un angle qui différera de $\frac{\pi}{2}$ par une quantité d'ordre ω.

Par suite, dans le mouvement de la projection du pendule sur le plan d'oscillation, les travaux des projections de la force centrifuge composée et de la force d'inertie dans le mouvement d'entrainement sont tous deux d'ordre ω^2, et il en est de même du travail de la projection de la tension du fil.

Donc, si l'on applique le théorème des forces vives au mouvement de la projection du pendule sur le plan d'oscillation, pendant une oscillation simple quelconque d'ordre impair, on obtiendra une équation qui ne différera de l'équation (3) du paragraphe précédent que par un terme en ω^2 et par la substitution de $\theta_{2(i-1)}$ à θ_0 (en désignant par θ_{2i-2} l'amplitude au commencement de la $i^{\text{ème}}$ oscillation complète).

En effet, dans l'équation (3) le premier membre représentant

la force vive divisée par l^2, le deuxième représente le double du travail des forces divisé par le même facteur.

Nous n'avons donc qu'à remplacer dans l'équation (3) θ par θ', pour indiquer qu'il s'agit de la projection du pendule sur le plan d'oscillation, θ_0 par θ_{2i-2}, et à ajouter un terme en ω^2.

Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d\theta'^2}{dt^2} = \frac{2A^2}{1+4\gamma^2A^4}\left[\cos\theta' + 2\gamma A^2 \sin\theta' - (\cos\theta_{2i-2} + 2\gamma A^2 \sin\theta_{2i-2})e^{2\gamma A^2(\theta' - \theta_{2i-2})}\right] + \omega^2 F(t),$$

$F(t)$ ne contenant jamais aucun terme en $\frac{1}{\omega}$.

L'équation relative à une oscillation d'ordre pair s'obtiendrait en remplaçant dans la précédente γ par $-\gamma$ et θ_{2i-2} par $-\theta_{2i-1}$; on aurait ainsi

$$\frac{d\theta'^2}{dt^2} = \frac{2A^2}{1+4\gamma^2A^4}\left[\cos\theta' - 2\gamma A^2 \sin\theta' - (\cos\theta_{2i-1} + 2\gamma A^2 \sin\theta_{2i-1})e^{-2\gamma A^2(\theta' + \theta_{2i-1})}\right] + \omega^2 F_1(t).$$

Comme le terme qui contient ω^2 en facteur est toujours effectivement de l'ordre de ω^2, quel que soit θ', en négligeant ce terme, nous ne ferons varier l'expression de t en fonction de θ' que d'un terme de l'ordre de ω^2. Donc, aux termes en ω^2 près, l'expression de t en fonction de θ' sera identique à celle que l'on obtient lorsqu'on ne tient pas compte de la rotation de la terre.

Passons maintenant à l'étude du mouvement du point lui-même dans l'espace.

Nous remarquerons pour cela, en vertu de ce que nous avons dit plus haut, que le travail des forces, tant réelles que fictives, dans le mouvement du point dans l'espace, ne diffère que par un terme en ω^2 de ce qu'il est pour le mouvement de la projection du point sur le plan d'oscillation ; par suite, si nous appliquons le théorème des forces vives au mouvement du point dans l'espace, nous n'avons qu'à remplacer dans le premier membre des équations (1) et (1') $\frac{d\theta'^2}{dt^2}$ par $\frac{v^2 - v_0^2}{l^2}$, (v_0 désignant la vitesse au commencement de l'oscillation simple considérée) (*), et à ajouter un terme en ω^2.

(*) v_0 n'est nul, ainsi que nous le verrons, que pour la première oscillation.

Mais, ainsi que nous le verrons plus loin, v_0 sera toujours de l'ordre de ω et, par suite, v_0^2 de l'ordre de ω^2. On peut donc réunir ce terme aux termes en ω^2, et l'on a par suite, pour l'équation des forces vives,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2A^2}{1+4\gamma^2 A^4} \\ &\times \left[\cos\theta' + 2\gamma A^2 \sin\theta' - (\cos\theta_{2i-2} + 2\gamma A^2 \sin\theta_{2i-2}) e^{2\gamma A^2(\theta' - \theta_{2i-2})}\right] + \omega^2 F_2(t). \end{aligned} \right.$$

S'il s'agit d'une oscillation impaire, on a

$$(2')\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2A^2}{1+4\gamma^2 A^4} \\ &\times \left[\cos\theta' - 2\gamma A^2 \sin\theta' - (\cos\theta_{2i-1} + 2\gamma A^2 \sin\theta_{2i-1}) e^{-2\gamma A^2(\theta' + \theta_{2i-1})}\right] + \omega^2 F_3(t). \end{aligned} \right.$$

Nous déduirons de là que l'on a, tant que $\frac{d\theta'}{dt}$ n'est pas lui-même très petit de l'ordre de ω,

$$v = \pm l \frac{d\theta'}{dt},$$

aux termes en ω^2 près.

Passons maintenant au théorème des moments des quantités de mouvement.

La résistance de l'air est dirigée en sens contraire de la vitesse, et égale à

$$g\gamma \frac{v^2}{l^2};$$

son moment sera, par suite, égal à

$$-g\gamma \frac{v}{l^2}(\mathrm{M}v),$$

Mv désignant le moment de la vitesse par rapport à OZ.

Mais on a

$$\mathrm{M}v = l^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}.$$

Comme d'ailleurs $\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}$ contient ω en facteur pour toute valeur de θ (aussi bien lorsque θ est très petit que lorsqu'il est quelconque), nous pourrons, dans le moment de la résistance, remplacer v par $\mp l \frac{d\theta'}{dt}$ (le signe — correspondant à une oscillation simple de rang impair, le signe + à une oscillation simple de rang pair).

En effet, dans le cas où l'on tient compte de la résistance de l'air, l'équation des moments des quantités de mouvement divisée par l^2 sera, d'après ce que nous avons vu :

$$\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\right) = -2\sin\theta(n\cos\theta + m\sin\theta\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - g\gamma\frac{v}{l^2}\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 f(t);$$

mais la substitution indiquée fera subir au terme $v\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}$ une variation qui sera en général de l'ordre de ω^3, et dans tous les cas au plus de l'ordre de ω^2; nous pouvons donc joindre cette variation au terme en ω^2 du second membre. Donc, en tenant compte de la résistance de l'air, l'équation des moments, divisée par l^2, deviendra, s'il s'agit d'une oscillation d'ordre impair (*),

$$d\left(\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\right) = -2n\sin\theta\cos\theta d\theta - 2m\sin^2\theta\cos\varphi d\theta + \frac{\gamma g}{l}\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta d\theta' + \omega^2 F_1(t)dt.$$

Pour le cas d'une oscillation simple d'ordre pair, on doit changer le signe de γ.

(*) Remarquons que le moment de la résistance de l'air étant, d'après ce qui précède, d'ordre $\gamma\omega$, la résistance de l'air étant de l'ordre de γ, on en conclut que l'angle de la tangente à la trajectoire avec le plan d'oscillation est de l'ordre de ω, tout au moins tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω. On peut voir, d'ailleurs, qu'il en est encore de même pour les valeurs de θ très petites de l'ordre de ω. Pour cela, il suffit de faire voir que si l'on considère le mouvement de la projection du pendule sur un plan horizontal, et si l'on désigne par θ_1 la valeur minima de θ pour la demi-oscillation que nous considérons, le rayon de courbure ρ de la projection horizontale de la trajectoire sera très grand de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$ pour $\theta = \theta_1$. Or, si l'on considère le mouvement de la projection horizontale et si l'on désigne par T la tension du fil, on aura aux termes en ω^2 près, pour $\theta = \theta_1$, $\frac{v^2}{\rho} = T\sin\theta_1 + K\omega$ en désignant, dans le plan horizontal, par $K\omega$ la composante normale à la projection de la trajectoire de la force centrifuge composée, composante qui est de l'ordre de ω, puisque la force elle-même est de cet ordre, et, comme θ_1 est aussi d'ordre ω, il en résulte que ρ est bien très grand de l'ordre $\frac{1}{\omega}$, comme on l'avait annoncé.

Mais, aux termes en ω^2 près, on a pour toute valeur de θ

$$n \cos\theta \sin\theta \, d\theta = n \sin\theta' \cos\theta' d\theta',$$

$$m \sin^2\theta \cos\varphi d\theta = m \cos\varphi_0 \sin^2\theta' d\theta'.$$

En effet, nous remarquerons d'abord que les deux membres des équations ci-dessus sont toujours de même signe, car pour la première $\sin\theta'$ et $d\theta$ changent tous deux de signe, en même temps, lorsque θ' passe par zéro, et pour la seconde $\cos\varphi$ et $d\theta$ changent tous deux de signe lorsque θ' passe par zéro (φ étant, aux termes en ω près, remplacé par $\pi + \varphi_0$ dès que θ' a passé par O, et n'est plus très petit de l'ordre de ω). De plus, en valeur absolue, les deux membres ont une différence qui est au plus de l'ordre de ω^2. En effet, tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω, θ' ne diffère de θ que par un terme de l'ordre de ω^2, $\cos\varphi_0$ ne diffère de $\pm \cos\varphi$ et $\frac{d\theta'}{dt}$ de $\pm \frac{d\theta}{dt}$ que par un terme au plus de l'ordre de ω; et enfin, pour θ très petit de l'ordre de ω, les deux membres des équations en question sont eux-mêmes au plus de l'ordre de ω^2.

Par suite, si nous posons

$$y = \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt},$$

nous pourrons, en réunissant les termes en ω^2, écrire notre équation

$$(5) \quad \frac{dy}{d\theta'} - \gamma A^2 y = -2n \sin\theta' \cos\theta' - 2m \cos\varphi_0 \sin^2\theta' + \omega^2 F_3(t),$$

équation linéaire du premier ordre en y.

Comme nous l'avons fait remarquer, cette équation s'applique à une oscillation simple quelconque d'ordre impair; pour une oscillation d'ordre pair, on devra changer le signe de γ.

Si l'on pose

$$P(t) = e^{\gamma A^2 \theta'} \int e^{-\gamma A^2 \theta'} F_3(t) \, d\theta',$$

l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$(4) \ldots \left\{ \begin{aligned} y &= Ce^{\gamma A^2 \theta'} + n \frac{2\cos 2\theta' + \gamma A^2 \sin 2\theta'}{4 + \gamma^2 A^4} \\ &+ m \cos \varphi_0 \left[\frac{1}{\gamma A^2} + \frac{2\sin 2\theta' - \gamma A^2 \cos 2\theta'}{4 + \gamma^2 A^4} \right] + \omega^2 P(t), \end{aligned} \right.$$

et celle relative à une demi-oscillation complète d'ordre pair s'en déduira en changeant γ en $-\gamma$; elle sera donc

$$(4'). \; . \left\{ \begin{aligned} y &= Ce^{-\gamma A^2 \theta'} + n \frac{2\cos 2\theta' - \gamma A^2 \sin 2\theta'}{4 + \gamma^2 A^4} \\ &+ m \cos \varphi_0 \left[-\frac{1}{\gamma A^2} + \frac{2\sin 2\theta' + \gamma A^2 \cos 2\theta'}{4 + \gamma^2 A^4} \right] + \omega^2 P_1(t), \end{aligned} \right.$$

$P_1(t)$ se déduisant de $P(t)$ par le changement de γ en $-\gamma$.

Désignons maintenant par θ_i la valeur absolue de θ à la fin de la $i^{\text{ème}}$ demi-oscillation complète et par y_i la valeur de y à la fin de cette même demi-oscillation complète.

Nous remarquerons, en effet, que si y est nul au commencement de la première demi-oscillation complète, il n'en sera pas de même au commencement des suivantes.

Ceci posé, nous allons considérer la $i^{\text{ème}}$ oscillation complète.

Au commencement de cette oscillation (c'est-à-dire à la fin de la $(2i-2)^{\text{e}}$ oscillation simple), y aura la valeur y_{2i-2} et θ la valeur θ_{2i-2}.

On aura donc, en appliquant l'équation (4) à la première moitié de la $i^{\text{ème}}$ oscillation complète, c'est-à-dire à la $(2i-1)^{\text{e}}$ oscillation simple, et exprimant que pour

$$\theta' = \theta_{2i-2}$$

on a

$$y = y_{2i-2},$$

$$y_{2i-2} = Ce^{\gamma A^2 \theta_{2i-2}} + n \frac{2\cos 2\theta_{2i-2} + \gamma A^2 \sin 2\theta_{2i-2}}{4 + \gamma^2 A^4}$$
$$+ m \cos \varphi_0 \left[\frac{1}{\gamma A^2} + \frac{2\sin 2\theta_{2i-2} - \gamma A^2 \cos 2\theta_{2i-2}}{4 + \gamma^2 A^4} \right] + \omega^2 P_{2i-2},$$

en désignant par P_{2i-2} la valeur de $P(t)$ au commencement de l'oscillation en question.

Tirant de l'équation précédente la valeur de C et la portant dans l'équation (4), nous aurons

$$y = e^{-\gamma A^2(\theta_{2i-2}-\theta')} \Bigg[y_{2i-2} - n \frac{2\cos 2\theta_{2i-2} + \gamma A^2 \sin 2\theta_{2i-2}}{4 + \gamma^2 A^4}$$

$$- m\cos\varphi_0 \left(\frac{1}{\gamma A^2} + \frac{2\sin 2\theta_{2i-2} - \gamma A^2 \cos 2\theta_{2i-2}}{4 + \gamma^2 A^4} \right) - \omega^2 P_{2i-2} \Bigg]$$

$$+ n \frac{2\cos 2\theta' + \gamma A^2 \sin 2\theta'}{4 + \gamma^2 A^4}$$

$$+ m\cos\varphi_0 \left(\frac{1}{\gamma A^2} + \frac{2\sin 2\theta' - \gamma A^2 \cos 2\theta'}{4 + \gamma^2 A^4} \right) + \omega^2 P(t).$$

Mais, ainsi que nous avons eu l'occasion de le faire remarquer, les termes en $\gamma^2\omega$ sont, en réalité, de l'ordre de ω^2; nous pouvons donc développer la formule ci-dessus suivant les puissances croissantes de γ et réunir les termes en $\gamma^2\omega$ à ceux en ω^2, puisqu'ils sont du même ordre.

Nous aurons par suite en remarquant que y_{2i-2} contient en réalité, $\gamma\omega$ en facteur,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & y = y_{2i-2} \\ & + \frac{n}{2}(\cos 2\theta' - \cos 2\theta_{2i-2}) - \frac{m\cos\varphi_0}{2}(\sin 2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta') + m\cos\varphi_0(\theta_{2i-2} - \theta') \\ & + \gamma A^2 \Bigg[\frac{n}{2}(\theta_{2i-2} - \theta')\cos 2\theta_{2i-2} - \frac{n}{4}(\sin 2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta') - \frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-2} - \theta')^2 \\ & + \frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-2} - \theta')\sin 2\theta_{2i-2} - \frac{m\cos\varphi_0}{4}(\cos 2\theta' - \cos 2\theta_{2i-2}) \Bigg] + \omega^2\lambda_1, \end{aligned} \right.$$

λ_1 étant une fonction de t, telle que le terme $\omega^2\lambda_1$ est toujours effectivement de l'ordre de ω^2.

Si nous exprimons maintenant que, pour

$$\theta' = -\theta_{2i-1},$$

on a

$$y = y_{2i-1},$$

il viendra

(6)
$$\begin{aligned}
y_{2i-1}-y_{2i-2} &= \frac{n}{2}(\cos 2\theta_{2i-1}-\cos 2\theta_{2i-2}) \\
&-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\sin 2\theta_{2i-2}+\sin 2\theta_{2i-1})+m\cos\varphi_0(\theta_{2i-2}+\theta_{2i-1}) \\
&+\gamma A^2\Big[\frac{n}{2}(\theta_{2i-2}+\theta_{2i-1})\cos 2\theta_{2i-2}-\frac{n}{4}(\sin 2\theta_{2i-2}+\sin 2\theta_{2i-1})-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-2}+\theta_{2i-1})^2 \\
&+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-2}+\theta_{2i-1})\sin 2\theta_{2i-2}-\frac{m\cos\varphi_0}{4}(\cos 2\theta_{2i-1}-\cos 2\theta_{2i-2})\Big]+\omega^2 M_1,
\end{aligned}$$

M_1 désignant une constante qui ne contient pas de termes en $\frac{1}{\omega}$.

Pour la demi-oscillation suivante, les valeurs initiales de y et θ' seront y_{2i-1} et $-\theta_{2i-1}$. La formule relative à cette demi-oscillation se déduira, par suite, de la formule (5) en y changeant γ en $-\gamma$ et y_{2i-2} en y_{2i-1}, θ_{2i-2} en $-\theta_{2i-1}$.

Nous obtenons de la sorte, pour cette demi-oscillation complète,

(5′)
$$\begin{aligned}
y &= y_{2i-1}+\frac{n}{2}(\cos 2\theta'-\cos 2\theta_{2i-1}) \\
&+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\sin 2\theta_{2i-1}+\sin 2\theta')-m\cos\varphi_0(\theta_{2i-1}+\theta') \\
&+\gamma A^2\Big[\frac{n}{2}(\theta_{2i-1}+\theta')\cos 2\theta_{2i-1}-\frac{n}{4}(\sin 2\theta_{2i-1}+\sin 2\theta')+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-1}+\theta')^2 \\
&-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-1}+\theta')\sin 2\theta_{2i-1}+\frac{m\cos\varphi_0}{4}(\cos 2\theta'-\cos 2\theta_{2i-1})\Big]+\omega^2\lambda_2.
\end{aligned}$$

Si l'on fait dans cette formule $\theta'=\theta_{2i}$, on aura pour la valeur finale y_{2i} de y

(6′)
$$\begin{aligned}
y_{2i}-y_{2i-1} &= \frac{n}{2}(\cos 2\theta_{2i}-\cos 2\theta_{2i-1}) \\
&+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\sin 2\theta_{2i-1}+\sin 2\theta_{2i})-m\cos\varphi_0(\theta_{2i-1}+\theta_{2i}) \\
&+\gamma A^2\Big[\frac{n}{2}(\theta_{2i-1}+\theta_{2i})\cos 2\theta_{2i-1}-\frac{n}{4}(\sin 2\theta_{2i-1}+\sin 2\theta_{2i})+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-1}+\theta_{2i})^2 \\
&-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-1}+\theta_{2i})\sin 2\theta_{2i-1}+\frac{m\cos\varphi_0}{4}(\cos 2\theta_{2i}-\cos 2\theta_{2i-1})\Big]+\omega^2 M_2.
\end{aligned}$$

Si nous ajoutons maintenant les équations (6) et (6′), nous aurons

$$\begin{aligned}
y_{2i}-y_{2i-2} &= \frac{n}{2}(\cos 2\theta_{2i}-\cos 2\theta_{2i-2})-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\sin 2\theta_{2i-2}-\sin 2\theta_{2i})\\
&+ m\cos\varphi_0(\theta_{2i-2}-\theta_{2i})+\gamma A^2\Big[\frac{n}{2}(\theta_{2i-2}+\theta_{2i-1})\cos 2\theta_{2i-2}\\
&+\frac{n}{2}(\theta_{2i-1}+\theta_{2i})\cos 2\theta_{2i-1}-\frac{n}{4}(\sin 2\theta_{2i-2}+2\sin 2\theta_{2i-1}+\sin 2\theta_{2i})\\
&-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-2}+2\theta_{2i-1}+\theta_{2i})(\theta_{2i-2}-\theta_{2i})\\
&+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-2}+\theta_{2i-1})\sin 2\theta_{2i-2}-\frac{m\cos\varphi_0}{2}(\theta_{2i-1}+\theta_{2i})\sin 2\theta_{2i-1}\\
&+\frac{m\cos\varphi_0}{4}(\cos 2\theta_{2i}+\cos 2\theta_{2i-2}-2\cos 2\theta_{2i-1})\Big]+M_3\omega^2.
\end{aligned}$$

Mais, dans les termes qui contiennent $\gamma\omega$ en facteur, nous pouvons négliger la variation de θ_i pendant une oscillation, car cette variation est de l'ordre de γ, et, multipliée par $\gamma\omega$, elle donne des termes en $\gamma^2\omega$ qui peuvent, d'après ce que nous avons dit, être réunis aux termes en ω^2.

Nous pourrons, par suite, écrire

$$\begin{aligned}
&y_{2i}-y_{2i-2}\\
&=\frac{n}{2}(\cos 2\theta_{2i}-\cos 2\theta_{2i-2})+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(2\theta_{2i-2}-\sin 2\theta_{2i-2}-2\theta_{2i}+\sin 2\theta_{2i})\\
&\quad-\gamma A^2 n\left[\sin 2\theta_{2i-2}-2\theta_{2i-2}\cos 2\theta_{2i-2}\right]+N\omega^2.
\end{aligned}$$

Mais, en nous reportant à ce que nous avons vu dans l'étude du pendule plan, nous avons, aux termes en γ^2 près,

$$\theta_{2i-2}=\theta_{2i}+8\gamma A^2(1-\theta_{2i-2}\cot\theta_{2i-2}),$$

ou, aux termes en θ^6 près,

$$\theta_{2i-2}=\theta_{2i}+\frac{8\gamma A^2\theta_{2i-2}^2}{3}\left(1+\frac{\theta_{2i-2}^2}{15}\right).$$

On a d'ailleurs également, aux termes en θ^6 près,

$$1 - 2\theta_{2i-2} \cot 2\theta_{2i-2} = \frac{4\theta_{2i-2}^2}{3}\left(1 + \frac{4\theta_{2i-2}^2}{15}\right).$$

Nous aurons par suite, avec la même approximation,

$$\gamma A^2 (\sin 2\theta_{2i-2} - 2\theta_{2i-2} \cos 2\theta_{2i-2}) = 4\gamma A^2 \sin 2\theta_{2i-2} \frac{\theta_{2i-2}^2}{3}\left(1 + \frac{4\theta_{2i-2}^2}{15}\right)$$

$$= \frac{\theta_{2i-2} - \theta_{2i}}{2} \sin 2\theta_{2i-2} + \frac{4\gamma A^2 \theta_{2i-2}^4}{15} \sin 2\theta_{2i-2}.$$

Mais, dans les expériences, on pourra négliger le dernier terme devant le premier; le rapport de ces deux termes est $\frac{\theta_{2i-2}^2}{5}$. Or, pour $\theta_{2i-2} = \frac{1}{2}$, ce rapport sera $\frac{1}{20}$, et l'angle d'écart ne saurait se maintenir supérieur à $\frac{1}{2}$ que pour un nombre très restreint d'oscillations.

Nous pourrons donc prendre dans les expériences, avec une approximation suffisante,

$$\gamma A^2 (\sin 2\theta_{2i-2} - 2\theta_{2i-2} \cos 2\theta_{2i-2}) = \frac{\theta_{2i-2} - \theta_{2i}}{2} \sin 2\theta_{2i-2},$$

et nous aurons alors

$$y_{2i} - y_{2i-2} = \frac{n}{2}(\cos 2\theta_{2i} - \cos 2\theta_{2i-2})$$

$$+ \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta_{2i-2} - 2\theta_{2i} + \sin 2\theta_{2i})$$

$$- \frac{n}{2}(\theta_{2i-2} - \theta_{2i}) \sin 2\theta_{2i-2} + N\omega^2.$$

Mais, en réunissant toujours les termes en $\gamma^2\omega$ à ceux de ω^2 qui sont de même ordre, on pourra prendre

$$(\theta_{2i-2} - \theta_{2i}) \sin 2\theta_{2i-2} = \sin(\theta_{2i-2} - \theta_{2i}) \sin(\theta_{2i-2} + \theta_{2i})$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\theta_{2i} - \frac{1}{2}\cos 2\theta_{2i-2},$$

et, par suite,

$$y_{2i} - y_{2i-2} = \frac{n}{4}(\cos 2\theta_{2i} - \cos 2\theta_{2i-2})$$

$$+ \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta_{2i-2} - 2\theta_{2i} + \sin 2\theta_{2i}) + N_i\omega^2;$$

et, donnant à i les valeurs 1, 2, 3 ... $(i - 1)$, on aura

$$y_2 = \frac{n}{4}(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_0) + \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - 2\theta_2 + \sin 2\theta_2)$$
$$+ N_1\omega^2,$$

$$y_4 - y_2 = \frac{n}{4}(\cos 2\theta_4 - \cos 2\theta_2) + \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_2 - \sin 2\theta_2 - 2\theta_4 + \sin 2\theta_4)$$
$$+ N_2\omega^2.$$

. . . .

. . . .

$$y_{2i-2} - y_{2i-4} = \frac{n}{4}(\cos 2\theta_{2i-2} - \cos 2\theta_{2i-4})$$

$$+ \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_{2i-4} - \sin 2\theta_{2i-4} - 2\theta_{2i-2} + \sin 2\theta_{2i-2}) + N_{i-1}\omega^2,$$

et, en faisant la somme de ces équations, nous aurons

$$y_{2i-2} = \frac{n}{4}(\cos 2\theta_{2i-2} - \cos 2\theta_0)$$

$$+ \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - 2\theta_{2i-2} + \sin 2\theta_{2i-2}) + N\omega^2.$$

Nous aurons ensuite, avec la même approximation,

$$y_{2i-1} = y_{2i-2} + \frac{n}{2}(\cos 2\theta_{2i-1} - \cos 2\theta_{2i-2})$$

$$+ \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_{2i-2} + 2\theta_{2i-1} - \sin 2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta_{2i-1})$$

$$- \gamma A^2 \left[\frac{n}{2}(\sin 2\theta_{2i-2} - 2\theta_{2i-2} \cos 2\theta_{2i-2}) \right.$$
$$\left. + m \cos \varphi_0\, \theta_{2i-2}(2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta_{2i-2})\right] + \omega^2 M_2.$$

ou, en prenant d'une façon analogue à ce que nous avons fait plus haut

$$\gamma A^2 (\sin 2\theta_{2i-2} - 2\theta_{2i-2} \cos 2\theta_{2i-2}) = (\theta_{2i-2} - \theta_{2i-1}) \sin 2\theta_{2i-2}$$
$$= \sin (\theta_{2i-2} - \theta_{2i-1}) \sin (\theta_{2i-2} + \theta_{2i-1})$$
$$= \tfrac{1}{2} \cos 2\theta_{2i-1} - \tfrac{1}{2} \cos 2\theta_{2i-2},$$

et, remplaçant y_{2i-2} par sa valeur obtenue plus haut,

$$y_{2i-1} = \frac{n}{4} (\cos 2\theta_{2i-1} - \cos 2\theta_0)$$
$$+ \frac{m \cos \varphi_0}{2} (2\theta_0 - \sin 2\theta_0 + 2\theta_{2i-1} - \sin 2\theta_{2i-1})$$
$$- m\gamma A^2 \cos \varphi_0\, \theta_{2i-2} (2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta_{2i-2}) + M\omega^2.$$

Nous avons donc, en définitive, pour le mouvement pendant la $(2i - 1)^{me}$ demi-oscillation complète,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & \frac{n}{2}\left(\cos 2\theta' - \frac{\cos 2\theta_{2i-2} + \cos 2\theta_0}{2}\right) \\ & + \frac{m \cos \varphi_0}{2} (2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - 2\theta' + \sin 2\theta') \\ & + \gamma A^2 \left[\frac{n}{2} (\theta_{2i-2} - \theta') \cos 2\theta_{2i-2} - \frac{n}{4} (\sin 2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta') \right. \\ & - \frac{m \cos \varphi_0}{2} (\theta_{2i-2} - \theta') (\theta_{2i-2} - \theta' - \sin 2\theta_{2i-2}) \\ & \left. - \frac{m \cos \varphi_0}{4} (\cos 2\theta' - \cos 2\theta_{2i-2}) \right] + \omega^2 \chi_1 (t), \end{aligned} \right.$$

et, pour le mouvement pendant la $2i^{me}$ demi-oscillation,

$$
(7')\quad \left\{
\begin{aligned}
y = {} & \frac{n}{2}\left(\cos 2\theta' - \frac{\cos 2\theta_{2i-1} + \cos 2\theta_0}{2}\right) \\
& + \frac{m \cos \varphi_0}{2}(2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - 2\theta' + \sin 2\theta') \\
& + \gamma A^2 \left[\frac{n}{2}(\theta_{2i-1} + \theta') \cos 2\theta_{2i-1} - \frac{n}{4}(\sin 2\theta_{2i-1} + \sin 2\theta') \right. \\
& + \frac{m \cos \varphi_0}{2}(\theta_{2i-1} + \theta')(\theta_{2i-1} + \theta' - \sin 2\theta_{2i-1}) \\
& \left. + \frac{m\cos\varphi_0}{4}(\cos 2\theta' - \cos 2\theta_{2i-1}) - m\cos\varphi_0 \theta_{2i-1}(2\theta_{2i-2} - \sin 2\theta_{2i-2})\right] \\
& + \omega^2 \chi_2(t),
\end{aligned}
\right.
$$

$\omega^2\chi_1(t)$ et $\omega^2\chi_2(t)$ étant des fonctions qui restent toujours effectivement de l'ordre de ω^2.

Les équations (7) et (7′) du mouvement, que nous venons d'obtenir, nous permettent de reconnaître que les termes en $\gamma\omega$ sont de deux sortes : d'une part, ceux qui contiennent t en facteur, ce sont ceux qui expriment la variation des conditions initiales relatives au commencement de chaque oscillation, car cette variation va toujours en s'accentuant, et celle qui se produit pendant une oscillation s'ajoute à celles qui ont eu lieu pendant les oscillations précédentes; d'autre part, les termes en $\gamma\omega$ où t n'entre pas en facteur.

Ces derniers termes auront une influence complètement négligeable dans le résultat final; en effet, comme nous avons reconnu que l'on a toujours $\gamma < 0{,}006$, les termes en $\gamma\omega$ qui ne sont pas multipliés par t ne sauraient avoir sur les résultats finals une influence appréciable.

Si, par exemple, on observe le pendule pendant une demi-heure, les termes en $\omega^2 t$, que nous avons négligés, pourraient être supérieurs à ceux en $\gamma\omega$ lorsqu'ils ne contiennent pas t en facteur. En effet, pour une demi-heure, on a sensiblement (en négligeant la différence entre le jour sidéral et le jour solaire) $\omega t = \frac{1}{48} = 0{,}0208$.

Au lieu de cela, au bout d'une demi-heure, on aurait pour $\gamma = 0{,}006$, $\gamma t = 10{,}8$.

Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, les termes en $\gamma\omega t$ ne peuvent provenir que de la variation des conditions initiales. En effet, si nous exceptons, pour l'instant, les portions de l'intégrale qui donne φ, correspondant aux valeurs très petites de θ, la valeur de $d\varphi$ dans l'air ne diffère que par un terme en $\gamma\omega$, ne contenant pas t en facteur, de celle qui correspond au mouvement dans le vide d'un pendule *pour lequel les conditions initiales, au commencement de l'oscillation considérée, seraient les mêmes;* ce fait résulte de suite de la considération des formules (7), (7′), (2), (2′).

On doit remarquer, au lieu de cela, que les termes exprimant la variation des conditions initiales contiennent bien effectivement t en facteur, car, par exemple, la différence entre $2\cos 2\theta_0$ et $\cos 2\theta_{x-1} + \cos 2\theta_0$ est de l'ordre de γt, puisqu'au bout d'un temps encore assez court la seconde quantité se réduira sensiblement à $1 + \cos 2\theta_0$, quantité qui diffère notablement de $2\cos 2\theta_0$ si l'angle d'écart est grand (*).

D'après ce qui précède, pour obtenir l'influence de la résistance de l'air sur la rotation du plan d'oscillation avec l'approximation désirée, c'est-à-dire en tenant compte des termes qui sont *effectivement* de l'ordre de $\gamma\omega$ dans les résultats finals, nous devrons :

1° Voir si les termes en γ peuvent avoir une influence supérieure à $\gamma\omega$, par suite de la partie singulière de l'intégrale qui détermine φ;

2° Calculer la vitesse de rotation du plan d'oscillation pour un pendule placé dans le vide, mais pour lequel les conditions initiales seraient les mêmes, au commencement de l'oscillation que l'on considère, que pour le pendule placé dans l'air.

Cherchons donc d'abord si les termes en γ peuvent avoir une

(*) Par exemple si

$$\theta_0 = 30°, \qquad \cos 2\theta_0 = \frac{1}{2}, \qquad 2\cos 2\theta_0 = 1, \qquad 1 + \cos 2\theta_0 = \frac{3}{2}.$$

influence d'ordre supérieur à $\gamma\omega$, par suite de la partie singulière de l'intégrale qui détermine φ. Pour cela nous allons calculer la valeur d'une autre intégrale plus simple, mais choisie de telle façon que, *pour la partie singulière de l'intégrale proposée,* la différence des deux intégrales puisse être au plus de l'ordre de $\gamma\omega$.

Nous avons posé

$$y = \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt},$$

mais $\frac{d\varphi}{dt}$ est de l'ordre de ω tant que θ n'est pas très petit de l'ordre de ω, et lorsque θ est très petit de l'ordre de ω, il est au lieu de cela de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$.

Désignons maintenant par θ_m la valeur minimum de θ pendant l'oscillation que nous considérons; nous pourrons poser

$$\sin^2\theta = \sin^2\theta' + \sin^2\theta_m + \omega^2 f(\theta'),$$

$f(\theta')$ étant une fonction de θ' qui est nulle pour $\theta' = 0$ (et par suite pour $\theta = \theta_m$), et telle que $\omega^2 f(\theta')$ est, pour toute valeur de θ', au plus de l'ordre de ω^2.

Nous aurons alors

$$\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = (\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m)\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 f(\theta')\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= (\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m)\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\lambda(\theta'),$$

$\omega^2\lambda(\theta')$ étant une fonction de θ' qui est pour toute valeur de cette variable, effectivement de l'ordre de ω^2, au plus.

Nous pourrons donc, dans les équations (7) et (7'), remplacer y par

$$\frac{d\varphi}{dt}(\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m),$$

en réunissant le terme en ω^2 du premier membre à celui du second.

Par suite, si nous posons dans l'équation (7)

$$2i - 1 = p,$$

et dans l'équation (7')

$$2i = p\,;$$

de plus, si nous remarquons que

$$\cos 2\theta' - \frac{\cos 2\theta_{p-1} + \cos 2\theta_0}{2} = \sin^2\theta_{p-1} + \sin^2\theta_0 - 2\sin^2\theta'$$

$$= \sin^2\theta_{p-1} + \sin^2\theta_0 + 2\sin^2\theta_m - 2(\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m),$$

$$2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - 2\theta' + \sin 2\theta' = 2(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0 - \theta' + \sin\theta'\cos\theta'),$$

nous pourrons mettre les équations (7) et (7') toutes deux sous la forme suivante :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m)\frac{d\varphi}{dt} = -n(\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m) \\ &+ n\frac{\sin^2\theta_{p-1} + \sin^2\theta_0}{2} + m\cos\varphi_0(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0) \\ &+ \gamma\omega E_1 + \omega^2 E_2 + M_1\gamma\omega\theta' + M_2\omega\theta'^3 + M_3\omega^2\theta' + M_4\gamma\omega\theta'^2, \end{aligned}\right.$$

où E_1 et E_2 sont des constantes qui ne contiennent pas $\frac{1}{\omega}$, M_1, M_2, M_3, M_4 des fonctions qui ne contiennent pas de termes en $\frac{1}{\omega}$, quelle que soit la valeur de θ', et où, de plus, M_1 et M_2 sont des fonctions paires de θ'.

Il s'agit de faire voir que si l'on désigne par α une valeur finie plus petite que θ_0, l'intégrale

$$\int_\alpha^{-\alpha}\left(-n + \frac{\frac{n}{2}(\sin^2\theta_{p-1} + \sin^2\theta_0) + m\cos\varphi_0(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0) + \gamma\omega E_1 + \omega^2 E_2}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m}\right)\frac{dt}{d\theta'}\,d\theta'$$

$$+\int_\alpha^{-\alpha}\frac{M_1\gamma\omega\theta' + M_2\omega\theta'^3}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m}\frac{dt}{d\theta'}\,d\theta' + \int_\alpha^{-\alpha}\frac{M_3\omega^2\theta' + M_4\gamma\omega\theta'^2}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m}\frac{dt}{d\theta'}\,d\theta'$$

ne diffère que par un terme en $\gamma\omega$ (ne contenant pas t en facteur (*)) de ce qu'elle serait pour le cas où l'on néglige la résistance de l'air, *les conditions initiales étant d'ailleurs les mêmes dans le second cas.*

Le fait est, comme nous l'avons dit, évident pour la partie non singulière de l'intégrale, et tout revient à démontrer qu'il en est de même pour la partie singulière.

Remarquons d'abord que les dernières intégrales ne sont pas singulières, puisque pour θ très petit de l'ordre de ω les numérateurs contiennent au moins ω^2 en facteur.

D'ailleurs M_1 et M_2 étant des fonctions paires et $\frac{dt}{d\theta'}$ étant également une fonction paire, lorsqu'on néglige les termes en γ, il en résulte que l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{M_1\gamma\theta' + M_2\theta'^3}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m} \frac{dt}{d\theta'} d\theta'$$

est nulle lorsqu'on y néglige les termes en γ; par suite, l'intégrale

$$\omega\int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{M_1\gamma\theta' + M_2\theta'^3}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m} \frac{dt}{d\theta} d\theta',$$

ne pourra donner naissance qu'à des termes en $\gamma\omega$.

Quant à la troisième intégrale, son premier terme contient ω^2 en facteur, pour les valeurs de θ qui ne sont pas très petites de l'ordre de ω, et ω pour ces dernières valeurs de θ; comme d'ailleurs l'intervalle des limites correspondant aux valeurs de θ très petites de l'ordre de ω est lui-même de l'ordre de ω, ce premier terme ne pourra donner naissance qu'à des termes en ω^2 dans le résultat final; nous pouvons donc le négliger. Son second terme contient effectivement $\gamma\omega$ en facteur pour toute valeur de θ'; il ne peut donc donner naissance, dans le résultat final, qu'à des termes de cet ordre, que nous pouvons négliger, d'après ce que nous avons dit.

(*) t désignant le temps écoulé depuis l'origine du mouvement, c'est-à-dire depuis le commencement de la première oscillation.

Tout revient donc à faire voir que dans l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\left(-n+\frac{\frac{n}{2}(\sin\theta_{p-1}+\sin^2\theta_0)+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0)+\gamma\omega E_1+\omega^2E_2}{\sin^2\theta'+\sin^2\theta_m}\right)\frac{dt}{d\theta'}d\theta'$$

la partie singulière ne peut différer que par un terme en $\gamma\omega$ de ce qu'elle serait si l'on négligeait la résistance de l'air, *en supposant toutefois les conditions initiales, au commencement de l'oscillation que l'on considère, les mêmes dans les deux cas.*

Mais en désignant par $2A^2f(\theta')$ le terme qui est multiplié par γ^2 dans l'expression de $\frac{d\theta'^2}{dt^2}$, on a :

$$\frac{dt}{d\theta'}=\frac{1}{A\sqrt{2}}$$

$$\times\frac{-1}{\sqrt{(\cos\theta'-\cos\theta_{p-1})-2\gamma A^2[\sin\theta_{p-1}\mp\sin\theta'-(\theta_{p-1}\mp\theta')\cos\theta_{p-1}]+\gamma^2f(\theta')}},$$

ce que nous pourrons écrire par les petites valeurs de θ'

$$\frac{dt}{d\theta'}=\frac{1}{A\sqrt{2}}\frac{-(1+B\theta'^2+C\gamma\theta')}{\sqrt{(1-\cos\theta_{p-1})-2\gamma A^2(\sin\theta_{p-1}-\theta_{p-1}\cos\theta_{p-1})+\gamma^2f(0)}}.$$

De telle sorte que si nous posons :

$$R=\frac{\frac{n}{2}(\sin^2\theta_{p-1}+\sin^2\theta_0)+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0)+\gamma E_1\omega+E_2\omega^2}{A\sqrt{2}\sqrt{(1-\cos\theta_{p-1})-2\gamma A^2(\sin\theta_{p-1}-\theta_{p-1}\cos\theta_{p-1})+\gamma^2f(0)}},$$

notre intégrale s'écrira

$$-n(t_1-t_0)+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{-Rd\theta'}{\sin^2\theta'+\sin^2\theta_m}+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{-R(B\theta'^2+C\gamma\theta')}{\sin^2\theta'+\sin^2\theta_m}d\theta'.$$

Mais R contenant ω en facteur, on pourra négliger la seconde intégrale, sans que cela puisse produire sur la partie singulière

de l'intégrale proposée une variation d'ordre supérieur à $\gamma\omega$, puisque, pour θ' très petit de l'ordre de ω, le premier terme contient ω, et le second γ en facteur, et que l'intervalle des limites de l'intégration correspondant à la partie singulière de l'intégrale est d'ordre ω.

Donc la partie singulière de l'intégrale proposée sera la même que celle de l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{-R d\theta'}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m} = R\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta'}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m},$$

et il s'agit de voir si les termes en γ peuvent produire dans cette dernière intégrale des termes d'ordre supérieur à $\gamma\omega$, lorsqu'on suppose que α est une quantité finie inférieure à θ_0.

Calculons donc cette dernière intégrale.

Nous aurons

$$\int \frac{d\theta'}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m} = \int \frac{\frac{d\theta'}{\cos^2\theta'}}{(1+\sin^2\theta_m)\operatorname{tg}^2\theta' + \sin^2\theta_m}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta_m\sqrt{1+\sin^2\theta_m}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{1+\sin^2\theta_m}{\sin^2\theta_m}}\operatorname{tg}\theta'\right)}{1+\frac{1+\sin^2\theta_m}{\sin^2\theta_m}\operatorname{tg}^2\theta'};$$

donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta'}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m} = \frac{2}{\sin\theta_m\sqrt{1+\sin^2\theta_m}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\sin^2\theta_m}{\sin^2\theta_m}}\operatorname{tg}\alpha\right)$$

$$= \frac{2}{\sin\theta_m\sqrt{1+\sin^2\theta_m}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin\theta_m}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta_m}}\right)\right].$$

Mais $\sin\theta_m$ contient ω en facteur, de telle sorte que si nous supposons que l'on prenne pour α un angle fini ne contenant pas ω en facteur, nous pourrons, en négligeant les termes en ω^2 dans le résultat final et remarquant que R contient ω en facteur,

(de sorte que le rapport $\frac{R}{\sin\theta_m}$ n'est plus multiplié par ω) prendre

$$R\int^{\alpha}\frac{d\theta'}{\sin^2\theta'+\sin^2\theta_m}=\frac{R\pi}{\sin\theta_m}-2R\cot\alpha.$$

Il faut maintenant calculer $\sin\theta_m$.

Pour cela nous remarquerons que θ_m est la valeur de θ pour laquelle on a à la fois $\theta'=0$ et $\frac{d\theta}{dt}=0$.

Nous aurons par suite, en vertu des équations (2) et (2'),

$$\sin^2\theta_m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2=2A^2\left[1-\cos\theta_{p-1}-2\gamma A^2(\sin\theta_{p-1}-\theta_{p-1}\cos\theta_{p-1})+\gamma^2 f(0)\right],$$

en désignant, comme plus haut, par $2A^2f(\theta')$ le coefficient γ^2 dans l'expression de $\frac{d\theta'^2}{dt^2}$.

Mais l'équation (8), où l'on fait $\theta'=0$, nous donne ensuite

$$\sin^2\theta_m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0=-n\sin^2\theta_m+n\frac{\sin^2\theta_{p-1}+\sin^2\theta_0}{2}$$
$$+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0)+\gamma\omega E_1+\omega^2E_2,$$

et nous tirerons de ces équations, en éliminant $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$,

$$\left[-n\sin^2\theta_m+n\frac{\sin^2\theta_{p-1}+\sin^2\theta_0}{2}+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0)+\gamma\omega E_1+\omega^2E_2\right]^2$$
$$=2A^2\sin^2\theta_m\left[1-\cos\theta_{p-1}-2\gamma A^2(\sin\theta_{p-1}-\theta_{p-1}\cos\theta_{p-1})+\gamma^2f(0)\right].$$

Nous pouvons d'ailleurs négliger dans le premier membre le terme $n\sin^2\theta_m$, qui ne donnerait dans θ_m que des termes de l'ordre de ω^3, et par suite des termes de l'ordre de ω^2 dans le rapport $\frac{R}{\sin\theta_m}$.

Nous aurons, par suite,

$$\sin\theta_m=\frac{\frac{n}{2}(\sin^2\theta_{p-1}+\sin^2\theta_0)+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0)+\gamma\omega E_1+\omega^2E_2}{A\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta_{p-1}-2\gamma A^2(\sin\theta_{p-1}-\theta_{p-1}\cos\theta_{p-1})+\gamma^2f(0)}}=R,$$

et, en définitive,

$$R\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta'}{\sin^2\theta' + \sin^2\theta_m} = \pi - 2R\cot\alpha.$$

On voit maintenant, en désignant par R_0 la valeur de R pour $\gamma = 0$, que la valeur de cette intégrale ne diffère de ce qu'elle serait dans le vide, dans le cas d'un pendule pour lequel les conditions initiales seraient les mêmes que pour le pendule considéré, que par le terme

$$2(R - R_0)\cot\alpha,$$

terme qui est de l'ordre de $\gamma\omega$ et ne contient pas t en facteur; car en se reportant aux équations (7), (7′), (2) et (2′), on voit que R ne diffère de la valeur qu'il aurait dans le vide que par des termes en $\gamma\omega$, qui ne contiennent pas t en facteur.

Nous concluons de là que les termes en $\gamma\omega$ ne peuvent donner naissance, dans l'intégrale considérée, qu'à des termes effectivement de l'ordre de $\gamma\omega$.

Mais les parties singulières de cette intégrale et de celle qui donne φ ne pouvant, d'après ce que nous avons dit, différer au plus par des termes de l'ordre de $\gamma\omega$, nous en concluons enfin que *la variation de φ pendant l'oscillation considérée, pour le pendule dans l'air, ne différera de celle dans le vide relative à un pendule pour lequel les conditions initiales seraient les mêmes*, au commencement de l'oscillation en question, que par un terme en $\gamma\omega$, qui ne contiendra pas t en facteur, terme que l'on pourra négliger, puisque

$$\gamma < 0{,}006.$$

Cherchons donc maintenant quelle serait la vitesse de rotation du plan d'oscillation dans le vide, dans le cas d'un pendule pour lequel la valeur initiale de y serait, non pas nulle, mais égale à sa valeur dans l'air au commencement de la i^{me} oscillation complète; c'est-à-dire, en nous reportant à l'équation (7), que l'on aura pour

la valeur initiale de

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta,$$

$$\frac{n}{4}(\cos 2\theta_{2i-2}-\cos 2\theta_0)+\frac{m\cos\varphi_0}{2}(2\theta_0-\sin 2\theta_0-2\theta_{2i-2}+\sin 2\theta_{2i-2})+\gamma\omega P$$

$$=\frac{n}{2}(\sin^2\theta_0-\sin^2\theta_{2i-2})+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0-\theta_{2i-2}+\sin\theta_{2i-2}\cos\theta_{2i-2})$$

$$+\gamma\omega P.$$

Pour un pendule dans le vide, si l'angle d'écart initial était θ_{2i-2} et la valeur initiale de y nulle, on aurait pour la vitesse de rotation du plan d'oscillation, aux termes en ω^2 près,

$$\frac{d\tau}{dt}=-n+\frac{qG\pi}{8AT},$$

avec

$$q=n\sin^2\theta_{2i-2}+m\cos\varphi_0(\theta_{2i-2}-\sin\theta_{2i-2}\cos\theta_{2i-2}).$$

Mais, ainsi qu'on le voit bien facilement et ainsi que nous l'avons fait remarquer à la fin de la première partie, on passe du cas où la valeur initiale de $\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}$ est rigoureusement nulle à celui où elle est $\beta\omega$, en remplaçant q par $q+\beta\omega$; nous aurons donc, dans le cas présent, à remplacer q par

$$n\sin^2\theta_{2i-2}+m\cos\varphi_0(\theta_{2i-2}-\sin\theta_{2i-2}\cos\theta_{2i-2})+\frac{n}{2}(\sin^2\theta_0-\sin^2\theta_{2i-2})$$

$$+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0-\theta_{2i-2}+\sin\theta_{2i-2}\cos\theta_{2i-2})+\gamma\omega P,$$

c'est-à-dire que, en négligeant les termes en $\gamma\omega$ et en ω^2 dans le résultat final, nous devrons remplacer q par

$$\frac{n}{2}(\sin^2\theta_0+\sin^2\theta_{2i-2})+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0).$$

Nous aurons donc, en remplaçant de plus AT par sa valeur $\frac{\pi H}{2}$,

$$\frac{d\tau}{dt}=-n+\frac{\frac{n}{2}(\sin^2\theta_0+\sin^2\theta_{2i-2})+m\cos\varphi_0(\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta_0)}{4}\frac{G}{H},$$

où G et H ont les mêmes valeurs que dans le vide, c'est-à-dire

$$G = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4^2-1}{4} k^2 + \cdots + \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right]^2 \frac{4n^2-1}{2n} k^{2n-2} + \cdots$$

$$H = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \cdots \qquad + \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \cdots,$$

k ayant d'ailleurs, d'après la manière dont la formule a été établie, la valeur qui correspond à l'amplitude au commencement de l'oscillation considérée, c'est-à-dire que

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_{2i-2}}{2}.$$

Mais, aux termes en θ^4_{2i-2} près, on a

$$\frac{G}{H} = \frac{3}{2} \frac{1 + \frac{5}{32}\theta^2_{2i-2}}{1 + \frac{1}{16}\theta^2_{2i-2}},$$

soit sensiblement

$$\frac{G}{H} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\theta^2_{2i-2}}{10}\right).$$

Nous pourrons donc prendre, au point de vue de l'expérience,

$$\frac{G}{H} = \frac{3}{2},$$

puisque, même pour $\theta_{2i-2} = \frac{1}{2}$, l'erreur commise ne serait que de $\frac{1}{40}$.

En prenant cette valeur nous aurons

$$\frac{d\tau}{dt} = -n + 3\,\frac{n(\sin^2\theta_0 + \sin^2\theta_{2i-2}) + 2m\cos\varphi_0(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0)}{16}.$$

Calculons maintenant la vitesse de rotation moyenne du pendule, pendant un temps donné, ou, sous une autre forme, lorsque l'amplitude décroît de θ_0 à θ_p.

Nous avons

$$d\tau = -ndt + 3\frac{n \sin^2\theta_0 + 2m\cos\varphi_0(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0)}{16}dt$$
$$+ \frac{3n\sin^2\theta_{2i-2}}{16}dt.$$

Mais nous pourrons, pour les angles d'écart que l'on peut réaliser dans les expériences, remplacer

$$\sin^2\theta_{2i-2} \qquad \text{par} \qquad \theta_{2i-2}^2;$$

cela revient en effet à négliger un terme en θ^4 devant un terme en θ^2 dans une expression multipliée par ω.

Si alors nous désignons par t le temps qui s'est écoulé depuis le commencement du mouvement jusqu'au commencement de la i^{me} oscillation, nous aurons, d'après ce que nous avons établi plus haut,

$$\frac{1}{\theta_{2i-2}} - \frac{1}{\theta_0} = \frac{4\gamma A^3}{3\pi}t,$$

ou, en posant

$$\lambda = \frac{4\gamma A^3}{3\pi}$$

$$\theta_{2i-2} = \frac{\theta_0}{1 + \theta_0\lambda t}$$

Nous aurons par suite, en négligeant partout les termes en θ^4 dans l'expression de $d\tau$,

$$d\tau = -ndt + \frac{3n\theta_0^2}{16}dt + \frac{m\cos\varphi_0}{4}\theta_0^3 dt + \frac{3n\theta_0^2}{16}\frac{dt}{(1+\theta_0\lambda t)^2},$$

ou, en intégrant,

$$\tau = -n\left(1 - \frac{3\theta_0^2}{16}\right)t + \frac{m\cos\varphi_0}{4}\theta_0^3 t + \frac{3n\theta_0}{16\lambda}\left(1 - \frac{1}{1+\theta_0\lambda t}\right),$$

et, par suite, on a pour la vitesse moyenne de rotation du plan d'oscillation :

$$-n + \frac{3\theta_0^2}{16}n + \frac{m\cos\varphi_0}{4}\theta_0^3 + \frac{3n\theta_0^2}{16(1+\theta_0\lambda t)}.$$

Mais si l'on désigne par θ_p l'amplitude à la fin de l'observation, on aura

$$\theta_p = \frac{\theta_0}{1 + \theta_0 \lambda t},$$

de sorte qu'en tenant compte de cette valeur on aura, pour la vitesse de rotation moyenne du plan d'oscillation,

$$\frac{\tau}{t} = -n + \frac{3n\theta_0}{16}(\theta_0 + \theta_p) + \frac{m \cos \varphi_0}{4}\theta_0^2.$$

On voit donc que, pour tenir compte de la résistance de l'air, on doit simplement remplacer dans le terme en n, θ_0^2 par $\theta_0 \left(\frac{\theta_0+\theta_p}{2}\right)$, le terme en m restant le même que si l'amplitude n'avait pas décrû.

Si, par exemple, on supposait $\theta_0 = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, en degrés,

$$\theta_0 = 28^\circ,39',$$

$$\gamma = 0,003,$$

$$l = g = 9^m,81,$$

la formule

$$\gamma = \frac{0,0236 l^2}{gR}$$

donnerait, pour le rayon R de la sphère du pendule,

$$R = 77 \text{ millimètres.}$$

Supposant que l'on observe le pendule pendant une heure, prenant donc

$$t = 3600,$$

on aurait sensiblement

$$\theta_p = 0,15,$$

ou, en degrés,

$$\theta_p = 8^\circ,36'.$$

On en déduirait alors, pour la vitesse de rotation moyenne du plan d'oscillation pendant ce temps,

$$\frac{\tau}{t} = -n + \frac{3n}{32}\,0{,}65 + \frac{m \cos \varphi_0}{32} = -\,0{,}94\,n + 0{,}03\,m \cos \varphi_0.$$

Si l'on suppose la latitude de 45°, on aura

$$n = m = \frac{\omega}{\sqrt{2}},$$

et, par suite,

$$\frac{\tau}{t} = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}(0{,}94 - 0{,}03 \cos \varphi_0),$$

et la valeur minimum de cette vitesse de rotation sera, pour $\cos \varphi_0 = 1$,

$$\frac{\tau}{t} = -\,0{,}91\,\frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

La rotation au bout d'une heure sera sensiblement

$$\frac{0{,}91}{\sqrt{2}}\,\frac{2\pi}{24} = 9°39'.$$

Dans le cas des oscillations très petites, on aurait trouvé

$$\frac{2\pi}{24\sqrt{2}} = 10°36'.$$

On voit que, par suite de l'angle d'écart de $\frac{1}{2}$ ou 28° 39', l'angle de rotation au bout d'une heure pourrait être diminué d'un degré environ.

